情報理工学院　数理・計算科学系の数理・計算科学コースおよび知能情報コースで学びたい方は、数理・計算科学系のページ (http://educ.titech.ac.jp/is/) なども御覧下さい。

この PDF ファイルには、以下の大学院入試問題が掲載されています。

（現在の系）情報理工学院　数理・計算科学系

- 平成２９年度４月または平成２８年度　９月入学者用入試問題（平成２８年実施）

（旧専攻）大学院情報理工学研究科　数理・計算科学専攻

- 平成２８年度４月または平成２７年度１０月入学者用入試問題（平成２７年実施）
- 平成２７年度４月または平成２６年度１０月入学者用入試問題（平成２６年実施）
- 平成２６年度４月または平成２５年度１０月入学者用入試問題（平成２５年実施）
- 平成２５年度４月または平成２４年度１０月入学者用入試問題（平成２４年実施）
- 平成２４年度４月または平成２３年度１０月入学者用入試問題（平成２３年実施）
- 平成２３年度４月または平成２２年度１０月入学者用入試問題（平成２２年実施）
- 平成２２年度４月または平成２１年度１０月入学者用入試問題（平成２１年実施）
- 平成２１年度４月または平成２０年度１０月入学者用入試問題（平成２０年実施）
- 平成２０年度４月または平成１９年度１０月入学者用入試問題（平成１９年実施）

なお、数理・計算科学専攻の入試問題には専門科目と外国語試験がありましたが、この PDF ファイルには専門科目のみを掲載しています。

また、平成２９年４月入学及び平成２８年９月入学に関する入試問題の想定問題は、http://www.titech.ac.jp/graduate_school/news/2016/033058.html に掲載されています。

専門科目 (午前)

29　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

Mathematical and Computing Science

Time 9:30AM – 1:00PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in the designated place of each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

n 次実対称行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と n 次元実ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が与えられているとし，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$ と定義する．ただし，$\boldsymbol{x}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．

(1) $\boldsymbol{A}$ が正定値行列，つまり任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ であれば，$f(\boldsymbol{x})$ は最小値をとり，その値を達成するような点（今後，そのような点を最小点と呼ぶ）が存在し，一意であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{A}$ が半正定値行列，つまり任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ であり，$\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を k $(1 \leq k < n)$ とする．$f(\boldsymbol{x})$ の最小点からなる集合 S から任意の $\boldsymbol{x}^* \in S$ をとってきたとすると，$S_{\boldsymbol{x}^*} = \{\boldsymbol{s} - \boldsymbol{x}^* | \boldsymbol{s} \in S\}$ が $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間になることを示せ．

(3) $S_{\boldsymbol{x}^*}$ の次元を n と k を用いて求めよ．

Problem A

Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be an n-order real symmetric matrix, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ be an n-dimensional real vector, and let us define the function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $f(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$. Here, $\boldsymbol{x}^\top$ means the transpose of the vector $\boldsymbol{x}$.

(1) Assume $\boldsymbol{A}$ is a positive definite matrix (that is, $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$). Show that there is a point where $f(\boldsymbol{x})$ attains its minimum (we call this/these point(s) the minimal point(s), hereafter), and it is unique.

(2) Assume $\boldsymbol{A}$ is positive semidefinite (that is, $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$, for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$), and also that the rank of $\boldsymbol{A}$ is k $(1 \leq k < n)$. Define S as the set of all the minimal points of $f(\boldsymbol{x})$, and let an arbitrary $\boldsymbol{x}^* \in S$. Show that $S_{\boldsymbol{x}^*} = \{\boldsymbol{s} - \boldsymbol{x}^* | \boldsymbol{s} \in S\}$ is a linear subspace of $\mathbb{R}^n$.

(3) Determine the dimension of $S_{\boldsymbol{x}^*}$ in terms of n and k.

問 B

$[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 f が，ある実数 A に対し $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ を満たすと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) $[0, \infty)$ 上, f は有界であることを示せ．

(2) 極限

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a^2} \int_0^a f(x) dx$$

を求めよ．

(3) 極限

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx$$

を求めよ．

Problem B

Let f be a real-valued continuous function over $[0, \infty)$ which converges to a certain real value A as $x \to \infty$, i.e., $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. Answer the following questions.

(1) Show that f is bounded over $[0, \infty)$.

(2) Find the following limit

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a^2} \int_0^a f(x)dx.$$

(3) Find the following limit

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx.$$

問 C

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ とし，これらの文字から成る有限列全体を Σ^* と表記する．以下では $\alpha, \beta, \ldots$ 等は Σ^* の要素を表す．列 $\omega \in \Sigma^*$ が与えられたとき Σ^* 上の二項関係 $\overset{(\omega)}{\mapsto}$ と $\overset{(\omega)}{\rightsquigarrow}$ を次のように定義する．

$$\alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ 中に出現するすべての } \mathtt{a} \text{ を } \omega \text{ に置き換えると } \beta \text{ になる．}$$

$$\alpha \overset{(\omega)}{\rightsquigarrow} \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ 中に出現する } \mathtt{a} \text{ のいくつか（0 個でもよい）を } \omega \text{ に置き換えると } \beta \text{ になる．}$$

たとえば次が成り立つ．

$\mathtt{abaabb} \overset{(\mathtt{cac})}{\mapsto} \mathtt{cacbcaccacbb}$

$\mathtt{abaabb} \overset{(\mathtt{cac})}{\rightsquigarrow} \mathtt{cacbcaccacbb}$ $\quad$ $\mathtt{abaabb} \overset{(\mathtt{cac})}{\rightsquigarrow} \mathtt{abcacabb}$ $\quad$ $\mathtt{abaabb} \overset{(\mathtt{cac})}{\rightsquigarrow} \mathtt{abaabb}$

$\mathtt{abaabb} \overset{(\mathtt{a})}{\mapsto} \mathtt{abaabb}$ $\quad$ $\mathtt{abaabb} \overset{(\varepsilon)}{\mapsto} \mathtt{bbb}$ $\quad$ $\mathtt{abaabb} \overset{(\varepsilon)}{\rightsquigarrow} \mathtt{abbb}$

$\mathtt{ccc} \overset{(\mathtt{abc})}{\mapsto} \mathtt{ccc}$

ただし ε は空列である．さらに Σ^* 上の二項関係 $\mapsto$ と $\rightsquigarrow$ を次のように定義する．

$$\alpha \mapsto \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある } \omega \in \Sigma^* \text{ が存在して } \alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \beta.$$

$$\alpha \rightsquigarrow \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある } \omega \in \Sigma^* \text{ が存在して } \alpha \overset{(\omega)}{\rightsquigarrow} \beta.$$

(1) $\alpha = \mathtt{abac}$, $\beta = \mathtt{caabcaac}$, $\gamma = \mathtt{cbababcbabac}$ とすると $\alpha \overset{(\mathtt{caa})}{\mapsto} \beta \overset{(\mathtt{ba})}{\mapsto} \gamma$ である．このとき $\alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \gamma$ となる ω を書け．

(2) $\mapsto$ が推移的であることを示せ．

(3) $\rightsquigarrow$ が推移的でないことを示せ．

(4) $\mapsto$ が反対称的であることを示せ．

(5) $\rightsquigarrow$ が反対称的でないことを示せ．

(注) 集合 X 上の二項関係 R が推移的であるとは，任意の $x, y, z \in X$ に対して

$(xRy$ かつ $yRz)$ ならば xRz

が成り立つことである．また R が反対称的であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して

$(xRy$ かつ $yRx)$ ならば $x = y$

が成り立つことである．

Problem C

Define $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$. Σ^* represents the set of finite strings over Σ. In the following, $\alpha, \beta, \ldots$ denote elements of Σ^*. Given a string $\omega \in \Sigma^*$, we define two binary relations $\overset{(\omega)}{\mapsto}$ and $\overset{(\omega)}{\rightsquigarrow}$ on Σ^* as follows.

$$\alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \beta \iff \beta \text{ is obtained from } \alpha \text{ by replacing all the occurrences of } \mathsf{a} \text{ by } \omega.$$

$$\alpha \overset{(\omega)}{\rightsquigarrow} \beta \iff \beta \text{ is obtained from } \alpha \text{ by replacing some (possibly zero) occurrences of } \mathsf{a} \text{ by } \omega.$$

For example, we have

$$\mathsf{abaabb} \overset{(\mathsf{cac})}{\mapsto} \mathsf{cacbcaccacbb}$$

$$\mathsf{abaabb} \overset{(\mathsf{cac})}{\rightsquigarrow} \mathsf{cacbcaccacbb} \qquad \mathsf{abaabb} \overset{(\mathsf{cac})}{\rightsquigarrow} \mathsf{abcacabb} \qquad \mathsf{abaabb} \overset{(\mathsf{cac})}{\rightsquigarrow} \mathsf{abaabb}$$

$$\mathsf{abaabb} \overset{(\mathsf{a})}{\mapsto} \mathsf{abaabb} \qquad \mathsf{abaabb} \overset{(\varepsilon)}{\mapsto} \mathsf{bbb} \qquad \mathsf{abaabb} \overset{(\varepsilon)}{\rightsquigarrow} \mathsf{abbb}$$

$$\mathsf{ccc} \overset{(\mathsf{abc})}{\mapsto} \mathsf{ccc}$$

where ε denotes the empty string. Moreover we define binary relations $\mapsto$ and $\rightsquigarrow$ on Σ^* as follows.

$$\alpha \mapsto \beta \iff \alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \beta \text{ for some } \omega \in \Sigma^*.$$

$$\alpha \rightsquigarrow \beta \iff \alpha \overset{(\omega)}{\rightsquigarrow} \beta \text{ for some } \omega \in \Sigma^*.$$

(1) Let $\alpha = \mathsf{abac}$, $\beta = \mathsf{caabcaac}$, and $\gamma = \mathsf{cbababcbabac}$. We have $\alpha \overset{(\mathsf{caa})}{\mapsto} \beta \overset{(\mathsf{ba})}{\mapsto} \gamma$. Find a string ω such that $\alpha \overset{(\omega)}{\mapsto} \gamma$.

(2) Show that the relation $\mapsto$ is transitive.

(3) Show that the relation $\rightsquigarrow$ is not transitive.

(4) Show that the relation $\mapsto$ is antisymmetric.

(5) Show that the relation $\rightsquigarrow$ is not antisymmetric.

(Note) A binary relation R on a set X is transitive if xRy and yRz imply xRz, for all $x, y, z \in X$. R is antisymmetric if xRy and yRx imply $x = y$, for all $x, y \in X$.

問 1

2 元の有限体 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ について，群

$$\begin{aligned} G &= GL_2(\mathbb{F}_2) \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid g \text{ は正則},\ a, b, c, d \in \mathbb{F}_2 \right\} \end{aligned}$$

を考える．群 G の積は行列の積であり，単位元は単位行列 $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ である．

(1) 群 G の元 $x = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ と $y = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ について，位数をそれぞれ求めよ．

(2) 群 G の位数を求めよ．

(3) 群 G の部分群をすべて求めよ．

Problem 1

For the finite field $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ with two elements, consider the group

$$\begin{aligned} G &= GL_2(\mathbb{F}_2) \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid g \text{ is non-singular, } a, b, c, d \in \mathbb{F}_2 \right\}. \end{aligned}$$

Remark that the multiplication of the group G is the matrix multiplication, and the identity element is the identity matrix $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$.

(1) Find the order of the elements $x = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ in the group G, respectively.

(2) Find the order of the group G.

(3) Find all subgroups of the group G.

問 2

有限集合 $S = \{a, b, c, d\}$ について，部分集合の族

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, S\}$$

を考える.

(1) $\mathcal{O}$ が S の開集合系であることを示せ.

(2) 位相空間 $(S, \mathcal{O})$ の部分集合 $\{b\}$ の閉包を求めよ.

(3) 位相空間 $(S, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間になるか否かを理由をつけて述べよ.

Problem 2

For the finite set $S = \{a, b, c, d\}$, consider the family of subsets

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, S\}.$$

(1) Show that $\mathcal{O}$ is a topology on S.

(2) Find the closure of the subset $\{b\}$ in the topological space $(S, \mathcal{O})$.

(3) Determine whether the topological space $(S, \mathcal{O})$ is a Hausdorff space or not.

問 3

$[0,1]$ 上の連続関数全体のなす線形空間 $C[0,1]$ の元 u に対して，

$$\|u\| = \max\{\,|u(x)|\,;0 \le x \le 1\}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\|\cdot\|$ が $C[0,1]$ のノルムとなることを示せ．

以下，このノルムの導入された線形空間 $C[0,1]$ を X と表す．

(2) P を多項式全体のなす集合とする．P は X の部分空間であることを示せ．ここで，X の部分空間とは，X の部分集合で，線形空間となるものを意味する．

(3) 自然数 n に対して，$u_n \in P$ を

$$u_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

と定義する．$n \to \infty$ のとき，u_n は X で収束することを示せ．

(4) $n \to \infty$ のとき，u_n は P で収束しないことを示せ．

Problem 3

Let $C[0,1]$ be the linear space of continuous functions over $[0,1]$. Let

$$\|u\| = \max\{\, |u(x)| \,;\, 0 \le x \le 1\}$$

for $u \in C[0,1]$. Answer the following questions.

(1) Show that $\|\cdot\|$ is a norm of $C[0,1]$.

Hereafter, X denotes the linear space $C[0,1]$ with this norm.

(2) Let P be the set of polynomials. Show that P is a subspace of X. Here a subspace of X means a linear space which is a subset of X.

(3) For each natural number n, let $u_n \in P$ be defined by

$$u_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

Show that u_n converges in X as $n \to \infty$.

(4) Show that u_n does not converge in P as $n \to \infty$.

問 4

次の線形計画問題 $\mathcal{P}$ を考える：

$$\mathcal{P}\ :\ \begin{array}{lcrcl} \text{最大化} & : & -2x_1+5x_2-4x_3 & & \\ \text{制約} & : & 3x_1+3x_2-5x_3 & \leq & 7 \\ & & 7x_1-3x_2+7x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{P}$ の最適解 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) をシンプレックス法で求めよ．

(2) $\mathcal{P}$ の双対問題 $\mathcal{D}$ を書き下せ．

(3) $\mathcal{D}$ の実行可能集合を図示し，その唯一の端点を求めよ．

Problem 4

Let $\mathcal{P}$ be the following linear programming problem

$$\mathcal{P} \ : \ \begin{array}{lcrcl} \text{maximize} & : & -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 & & \\ \text{subject to} & : & 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 & \leq & 7 \\ & & 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Answer the following questions.

(1) Obtain an optimal solution (x_1^*, x_2^*, x_3^*) of $\mathcal{P}$ using the simplex method.

(2) Write the dual problem $\mathcal{D}$ of $\mathcal{P}$.

(3) Draw the feasible set of $\mathcal{D}$ and compute its unique vertex.

問 5

以下の問に答えよ．

(1) 確率 $p \in (0,1)$ で表の出るコイン投げを考える．表の出るまで投げた回数の期待値と分散を p を用いて表せ．

(2) ある袋の中に N 種類の玉が一つずつ入っているものとする．ここで N は 2 以上の整数とする．袋の中から無作為に玉を一つ取り出し，玉の種類を記録して袋の中に戻すことを「試行」と呼ぶとき，全ての種類の玉を記録するために何回の試行が必要か，という問題を考えよう．

各試行は独立で，取り出される玉の種類は一様分布に従うとする．さらに，k 種類記録するまでに要した試行回数を S_k と記す．このとき，以下の問 (i),(ii) に答えよ．

(i) $S_{k+1} - S_k$ の期待値と分散を N と k を用いて表せ．ただし，$S_{k+1} - S_k$ が残り $N-k$ 種類の内の一つを取り出すまでに繰り返した試行の数であることに注意せよ．

(ii) S_N の期待値と分散をそれぞれ μ, σ^2 とおくとき，

$$\mu = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}, \quad \sigma^2 = N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N-i}{i^2}$$

であることを証明せよ．

Problem 5

Answer the following questions:

(1) We consider the coin tosses where the probability of a head coming up is $p \in (0, 1)$. Express, in terms of p, the expectation and the variance of the number of tosses needed to see the first head.

(2) Suppose that there is a bag with N-types of balls, each type consisting of exactly one ball. Here, N is an integer greater than or equal to 2. We call as a *trial* the following set of procedures of sampling a ball at random from the bag, recording the type of the sampled ball, and then putting it back in the bag. Then let us consider the problem of finding the number of trials needed to record all types of the balls.

We assume that each trial is independent of the others, and that the type of sampled balls follows the uniform distribution. Moreover, we denote by S_k the number of trials needed to record k-types of the balls. Then answer the following questions (i) and (ii):

(i) Express the expectation and the variance of $S_{k+1} - S_k$ in terms of N and k. Here, you can use the fact that $S_{k+1} - S_k$ is the number of trials needed to get one of the last $(N - k)$-types of the balls.

(ii) Show that the expectation μ and the variance σ^2 of S_N are given by

$$\mu = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}, \quad \sigma^2 = N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N-i}{i^2}.$$

問 6

２つの店 A, B があるとする．各店の毎日の来客人数はそれぞれ独立なポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\mathrm{Po}(\nu)$ に従うとする．1 日あたりの店 A と店 B の来客人数をそれぞれ X, Y と書き，n 日間の来客人数のデータ $(x_i, y_i)_{i=1}^n = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ が得られているとする．以下の問に答えよ．なお，導出の過程も記述すること．
ただし，パラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従う確率変数 X の確率質量関数は

$$\mathrm{P}(X = k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

で与えられる．

(1) ポアソン分布 $(*)$ が実際に確率分布になっていることを示せ．すなわち，$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k; \lambda) = 1$ を示せ．

(2) 観測データ $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ から λ と ν の最尤推定量を求めよ．ただし，$\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$ かつ $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ とする．

(3) ある日の合計来客人数 $N = X + Y$ がわかっているとき，X の条件付き分布を求めよ．

(4) 実は Y は X とは独立ではなく，X が与えられたときの Y の条件付き分布が未知パラメータ $a > 0$ を用いて

$$\mathrm{P}(Y = \ell | X = k; a) = \frac{f_a(k)^\ell}{\ell!} \exp(-f_a(k)),$$
$$f_a(k) = a(1 + k)$$

なるモデルで記述できるとする．観測データ $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ から a の最尤推定量を求めよ．ただし，$\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ とする．

Problem 6

Suppose that there are two stores A and B. The numbers of customers arriving at stores A and B in each day obey independent Poisson distributions $\mathrm{Po}(\lambda)$ and $\mathrm{Po}(\nu)$, respectively. We write the numbers of customers arriving at the stores A and B in a day as X and Y, respectively. Assume that we observed the data $(x_i, y_i)_{i=1}^n = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ of the numbers of customers for n days. Answer the following questions.
Here, the probability mass function of X obeying the Poisson distribution $\mathrm{Po}(\lambda)$ with the parameter $\lambda > 0$ is given by

$$\mathrm{P}(X = k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{$*$}$$

(1) Show that the Poisson distribution $(*)$ is actually a probability distribution. That is, show that $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k; \lambda) = 1$.

(2) Suppose that $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$ and $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$. Derive the maximum likelihood estimators of λ and ν from the observed data $(x_i, y_i)_{i=1}^n$.

(3) Given the total number $N = X + Y$ of customers, derive the conditional distribution of X.

(4) Suppose that Y is not independent of X, and that the conditional distribution of Y given X is expressed by the following model:

$$\mathrm{P}(Y = \ell | X = k; a) = \frac{f_a(k)^\ell}{\ell!} \exp(-f_a(k)),$$
$$f_a(k) = a(1 + k)$$

where $a > 0$ is an unknown parameter. Suppose that $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$. Derive the maximum likelihood estimator of a from the observed data $(x_i, y_i)_{i=1}^n$.

問 7

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

上の言語に関して以下の問に答えよ．

(1) 言語

$$A = \{w \mid w \text{ の上段の文字列は回文}\}$$

とする．回文とは前から読んでも後ろから読んでも同じになる文字列である．また，空列 ε も回文とみなす．たとえば，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in A$$

である．ポンピング補題を用いて A が正規でないことを示せ．

(2) 言語 A を生成する文脈自由文法を与えよ．

(3) ここでは，アルファベット Σ 上の文字列の各行を 2 進数とみなす．ただし，左端が最上位ビット (MSB) とする．言語

$$B = \{w \mid w \text{ の下段は上段の 3 倍}\}$$

とする．ただし空列 ε も B に含まれるとする．たとえば，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in B$$

である．このとき，B の各要素を逆に読んだ文字列からなる言語

$$B^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} \mid w \in B, \text{ただし}, w^{\mathcal{R}} \text{ は } w \text{ を逆から読んだ文字列}\}$$

を認識する 4 状態の決定性有限オートマトンの状態遷移図を与えよ．

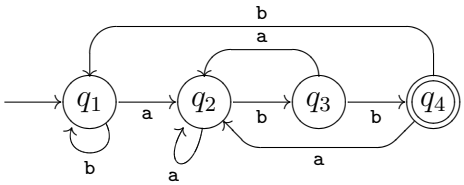
（次ページに続く）

注 1: **ポンピング補題**　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:
>
> (a) 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
>
> (b) $|y| > 0$
>
> (c) $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 個連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) となる．

注 2: **決定性有限オートマトンの状態遷移図**　以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w$ は abb で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



Problem 7

Let

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Answer the following questions on languages over Σ.

(1) Let

$$A = \{w \mid \text{the upper row string of } w \text{ is a palindrome}\},$$

where a palindrome is a string that reads the same forward and backward. The language A includes the empty string ε. For example,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in A.$$

Show that the language A is not regular by using the pumping lemma.

(2) Give a context-free grammar that generates the language A.

(3) Here, consider each row of a string over alphabet Σ to be a binary number, with the left most position indicating the most significant bit. Let

$$B = \{w \mid \text{the lower row of } w \text{ is three times the upper row}\}.$$

The language B includes the empty string ε. For example,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in B.$$

Let

$$B^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} \mid w \in B, \text{where } w^{\mathcal{R}} \text{ is a string that reads backward of } w\}.$$

Give a state diagram of a deterministic finite automaton for recognizing the language $B^{\mathcal{R}}$, by using four states.

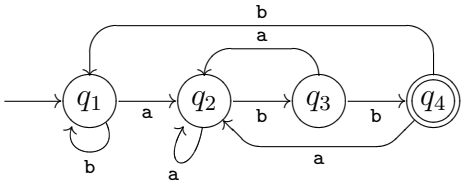
(Continued on the next page)

Note 1: **The pumping lemma** If L is a regular language, then there is a number p (the pumping length) such that

> if s is any string in L such that $|s| \geq p$, then s can be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:
>
> (a) for each $i \geq 0$, $xy^iz \in L$,
>
> (b) $|y| > 0$, and
>
> (c) $|xy| \leq p$,

where $|s|$ represents the length of the string s, y^i means that i copies of y are concatenated together, and y^0 equals the empty string ε (the string of the length zero).

Note 2: **A state diagram of a deterministic finite automaton** Consider the alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. A state diagram of a finite automaton recognizing the language $\{w \mid w \text{ ends with } \mathtt{abb}\}$ is as follows, where q_1 is the initial state, and q_4 is the accepting state.



問 8

図 1 の二分木のように最大の深さを除き節点が完全に詰まっており，また，深さ最大の葉が左詰めになっている二分木を広義の完全二分木と言う．広義の完全二分木の各節点に図 1 に示したように番号を付け，図 2 のように配列で表現する．たとえば，10 が格納されている節点には番号 2 が付いており, その配列表現において $A[2] = 10$ となっている．配列 A が次の条件を満たす時，この配列 A 及び対応する広義の完全二分木をヒープと呼ぶ．

（ヒープ条件）根以外の任意の節点 i について，$A[\mathrm{parent}(i)] \geq A[i]$ が成り立つ．

ここで，$\mathrm{parent}(i)$ は節点 i の親の番号とする．図 2 の配列 A はヒープ条件を満たしている．ヒープの各節点の高さを，その節点から葉までの最長の経路の辺の数とする．たとえば，図 1 において，2 が格納されている節点 9 は葉なので高さは 0 であり，節点 1 の高さは 2 であり，根（節点 0）の高さは 3 である．節点の高さについて，以下の二つの性質が成り立つ．

(P1) n 個の要素を持つヒープの根の高さは，$\lfloor \log_2 n \rfloor$ である．

(P2) n 個の要素を持つヒープにおいて，高さ h の節点は $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ 個以下である．

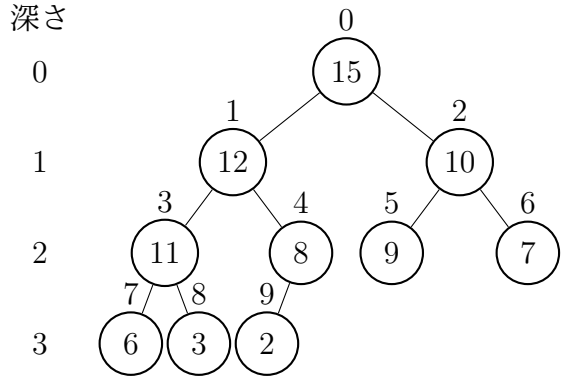


図 1: ヒープ（二分木表現）

配列 A

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	12	10	11	8	9	7	6	3	2

図 2: ヒープ（配列表現）

（次ページに続く）

次に，配列からヒープを構成する下のアルゴリズムを考える．関数 build_heap(a,n) は大きさ n の配列 a をヒープに変換する．補助関数 heapify(a,i,n) は節点 i の左右の部分木がヒープ条件を満たしているときに適用され，節点 i を根とする部分木をヒープにする．

```
void heapify(int a[], int i, int n) {
  int k = 2*i+1;                        /* 節点 k は，節点 i の左の子 */
  while (k < n) {
    if (k+1 < n && a[k+1] > a[k]) k = k+1;
    if (a[i] >= a[k]) return;
    int tmp = a[i];
    a[i] = a[k];
    a[k] = tmp;
    i = k; k = 2*i+1;
  }
}

void build_heap(int a[], int n) {
  for (int i = n-1; i >= 0; i--) {
    heapify(a, i, n);
  }
}
```

以下の問に答えよ．

(1) 1 から 7 までの整数を 1 つずつ含む要素数 7 のヒープ（配列表現）が何種類あるか示せ．

(2) 配列 $a_1 = \{2, 6, 7, 3, 9, 11, 8, 10, 15, 4\}$ に対して，build_heap(a_1,10) を実行する．実行後の配列 a_1 の要素を順番に書け．

(3) 要素数 n の配列 a とその節点 i に対して，heapify(a,i,n) を実行する．節点 i の高さを h とすると，実行時間は $O(h)$ となる．その理由を説明せよ．

(4) 大きさ n の配列 a に対する build_heap(a,n) の実行時間が $O(n)$ であることを，性質 (P1), (P2) を用いて示せ．$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$ を使用して良い．

Problem 8

A nearly complete binary tree is a binary tree that is filled on all levels except possibly the deepest, which is filled from the left, as shown in Figure 1. Each node of a nearly complete binary tree is indexed as shown in Figure 1 and then the tree can be represented by the array A in Figure 2. For example, the node with value 10 has index 2 and thus $A[2] = 10$ in the array representation. The array A and also the binary tree corresponding to it are called heaps if the following heap property is satisfied:

> (Heap Property) for every node i other than the root, $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$ holds

where parent(i) is the index of the parent of node i. The array A in Figure 2 satisfies the heap property.
We define the height of a node to be the number of edges on the longest path from the node to a leaf. For the heap in Figure 1, node 9 that stores 2 is a leaf and thus its height is 0. The height of node 1 is 2, and the height of the root (node 0) is 3. Heaps satisfy the following two properties on the height of a node.

(P1) The root of an n-element heap has height $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

(P2) The number of nodes of height h in an n-element heap is bounded by $\lceil n/2^{h+1} \rceil$.

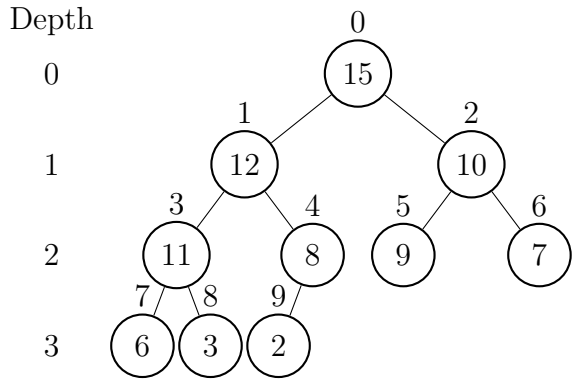


Figure 1: Heap (binary tree representation)

Array A

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	12	10	11	8	9	7	6	3	2

Figure 2: Heap (array representation)

(Continued on the next page)

Next, we consider the following algorithm that constructs a heap from an arbitrary array. The function `build_heap(`a`,`n`)` converts an n-element array a into a heap. The auxiliary function `heapify(`a`,`i`,`n`)` is applied to a node i when both of the left and right subtrees of i satisfy the heap property and converts the subtree rooted at the node i into a heap.

```
void heapify(int a[], int i, int n) {
  int k = 2*i+1;              /* node k is the left child of node i */
  while (k < n) {
    if (k+1 < n && a[k+1] > a[k]) k = k+1;
    if (a[i] >= a[k]) return;
    int tmp = a[i];
    a[i] = a[k];
    a[k] = tmp;
    i = k; k = 2*i+1;
  }
}

void build_heap(int a[], int n) {
  for (int i = n-1; i >= 0; i--) {
    heapify(a, i, n);
  }
}
```

Answer the following questions.

(1) Show the number of different 7-element heaps (array representation) that contain all integers from 1 to 7.

(2) For $a_1 = \{2, 6, 7, 3, 9, 11, 8, 10, 15, 4\}$, we run `build_heap(`$a_1$`,10)`. Write down the elements of the array a_1 after the execution.

(3) For an n-element array a and its node i, we run `heapify(`a`,`i`,`n`)`. Then, its running time is $O(h)$ for a node i of height h. Explain the reason.

(4) Show that the running time of `build_heap(`a`,`n`)` is $O(n)$ by using the properties (P1) and (P2) where n is the size of the array a. You can use $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$.

問 9

クリティカルセクション（critical section，以下 CS）とはプログラム領域であり，同時には 1 個のスレッドだけがその実行を許される．これを達成するように CS を囲む前処理と後処理を設計することを，クリティカルセクション問題と呼ぶ．
プログラム 1 とプログラム 2 のように，クリティカルセクション問題の解決を試みた．以下，2 個のスレッド，スレッド 0 とスレッド 1 だけが存在し，両スレッドともに同じプログラム（プログラム 1 または 2）を実行するとする．スレッドは前処理以下を複数回実行する可能性があることに注意せよ．プログラム 1，2 において，2 個のスレッドは変数 `turn` と `flag` を共有しており，一方のスレッドによる変更は他方のスレッドでも即座に観測されるとする．スレッド作成前に，`turn` には `0` が，`flag[0]` と `flag[1]` には `false` が代入される．変数 `i` と `j` は次の値をとる．スレッド 0 では `i` = `0` および `j` = `1`，スレッド 1 では `i` = `1` および `j` = `0`．

プログラム 1:

```
...
while (turn != i) ;  // 待つ      ··· 前処理
<クリティカルセクションのコード>
turn = j;                         ··· 後処理
...
```

プログラム 2:

```
...
flag[i] = true; // このスレッドがCSに入ろうとしている
turn = j;       // 別のスレッドを優先する                ··· 前処理
while (flag[(a)] && turn == (b)) ;  // 待つ
<クリティカルセクションのコード>
flag[(c)] = false;                ··· 後処理
...
```

(1) この状況で，クリティカルセクション問題の解決が満たすべき性質は次の 3 つである．

A. 相互排除：CS に入っているスレッドがある場合，他のスレッドは CS に入れない．

B. 進行：CS に入っているスレッドがなく，1 個以上のスレッドが前処理を実行する場合，それらのうち 1 個は CS に入れる．

C. 有限の待ち回数：前処理の実行を始めてから CS に入るまでの間に，他のスレッドの方が先に CS へ入ることもある．しかしその回数には上限がある．

しかし，プログラム 1 は性質 A〜C のうち 1 つを満たしていない．プログラム 1 が満たしていない性質はどれか，答えよ．また，その理由を答えよ．

(2) プログラム 2 は，性質 A〜C のすべてを満たす．(a)，(b)，(c) にはそれぞれ `i` か `j` が入る．どちらが入るか，答えよ．

（次ページに続く）

(3) プログラム 1 や 2 のようにスレッド自身が変数の値を調べ続ける方法はビジーウェイト（busy wait）やポーリング（polling）と呼ばれる．一方で，スレッドを実行待ち状態（waiting state）にする方法もある．

消費電力について，2 つの方法のどちらが優れているか，答えよ．また，その理由を数行程度で述べよ．

Problem 9

A critical section (CS) is a segment of a program that at most one thread is allowed to execute at the same time. The critical-section problem is to design an entry section and an exit section that surround a CS to achieve it.
We try to solve the critical-section problem as shown in Program 1 and Program 2. Assume that there are two threads, namely thread 0 and thread 1, that execute the same program (Program 1 or 2). Note that a thread may execute an entry section and following lines multiple times. In Program 1 and Program 2, the two threads share variables `turn` and `flag`. Their updates by a thread are immediately observed by the other thread. Before the two threads are created, `turn` is set to `0`, and `flag[0]` and `flag[1]` are set to `false`. Variables `i` and `j` hold the following values. In thread 0, `i` = `0` and `j` = `1`. In thread 1, `i` = `1` and `j` = `0`.

Program 1:

```
...
while (turn != i) ;  // wait      ··· Entry section
<critical section>
turn = j;                        ··· Exit section
...
```

Program 2:

```
...
flag[i] = true; // this thread tries to enter a CS
turn = j;    // gives way to another thread          ··· Entry section
while (flag[(a)] && turn == (b)) ;  // wait
<critical section>
flag[(c)] = false;               ··· Exit section
...
```

(1) In this situation, a solution to the critical-section problem should satisfy the following three properties.

A. Mutual exclusion: If a thread is in the CS, no other threads can be in the CS.

B. Progress: If no thread is in the CS and one or more threads execute the entry section, one of the threads enters the CS.

C. Bounded waiting: There exists a bound on the number of times that other threads enter the CS after a thread starts executing the entry section and before it enters the CS.

Program 1 does not satisfy one property out of the three properties. Answer which property is not satisfied. Describe its reason.

(2) Program 2 satisfies all the three properties. Fill (a), (b) and (c) with `i` or `j`.

(Continued on the next page)

(3) The approaches that Program 1 and 2 take is called “busy wait” or “polling,” in which a thread keeps running and repeatedly checks the value of a variable. On the other hand, there is another approach in which a thread transitions to the “waiting state.”

Which of the two approaches is superior in terms of power consumption? Explain its reason in a few lines.

専門科目 (午前)　　28　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

以下の対称行列に対し，下記の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -12 & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & 6b-1 & -(2b+1)\sqrt{3} \\ 6 & -(2b+1)\sqrt{3} & 2b-3 \end{pmatrix}$$

(1) 全ての実数 b に対し，$\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）が 2 以下であることを示せ．

以下の問では $b = -\frac{1}{2}$ とする．

(2) $\boldsymbol{A}$ の最大固有値に相当する固有ベクトル $\boldsymbol{x_0}$ を求めよ．

(3) 上で求めた $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^3$ が張る線形部分空間を V とする．$\mathbb{R}^3$ の通常の内積によって定まる V の直交補空間を $V^\perp$ とする．$V^\perp$ の正規直交基底を構成するベクトルのうち一つが $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})^\top$ であるとしたとき，もう一方を求めよ．ただし，$\top$ はベクトルの転置を表す．

問 2 (基礎問題)

$f(x)$ を，$[a,b]$ を含む開区間上の C^2 級関数で以下の条件をみたすものとする．

(i) $f(a) < 0 < f(b)$,

(ii) 任意の $x \in [a,b]$ に対して $f'(x) > 0$,

(iii) 任意の $x \in [a,b]$ に対して $f''(x) > 0$.

いま $x_0 = b$ から

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

によって帰納的に定義される数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,...}$ について，以下の問に答えよ．

(1) $\{x_n\}_{n=0,1,2,...}$ は単調減少であることを示せ．

(2) $\{x_n\}_{n=0,1,2,...}$ は $f(\gamma) = 0$ となる点 γ $(a < \gamma < b)$ に収束することを示せ．

問 3 (基礎問題)

W は空でない集合で $\sim$ は W 上の対称的かつ非反射的な 2 項関係とする．すなわち W の任意の要素 x, y に対して $(x \sim y$ ならば $y \sim x)$ と $(x \not\sim x)$ が成り立つ．W の任意の部分集合 A に対して A^* を次で定義する．

$$A^* = \{x \in W \ : \ (\forall a)(a \in A \text{ ならば } x \sim a)\}.$$

つまり A^* は A の全ての要素と関係が付く要素全体である．以下では X, Y は W の任意の部分集合を表す．

(1) $W^* = \emptyset$ かつ $\emptyset^* = W$ であることを示せ．

(2) 次のふたつの命題のどちらかは成り立つ．どちらが成り立つかを述べて，証明せよ．

（命題ア） $\forall X, \forall Y \big(X \subseteq Y$ ならば $X^* \subseteq Y^*\big)$.
（命題イ） $\forall X, \forall Y \big(X \subseteq Y$ ならば $X^* \supseteq Y^*\big)$.

(3) 次のふたつの命題のどちらかは成り立つ．どちらが成り立つかを述べて，証明せよ．

（命題ウ） $\forall X \ \big(X \subseteq X^{**}\big)$.
（命題エ） $\forall X \ \big(X \supseteq X^{**}\big)$.

(4) 一般に $X^* = X^{***}$ となることを証明せよ．

問 4 (一般問題)

整数 a, b, c に対して

$$a \equiv b \mod c$$

は $a - b$ が c の倍数であることを意味するものとする．自然数 n に対して その階乗を $n!$ で表すとき，以下の問に答えよ．

(1) $6! \equiv -1 \bmod 7$ および $10! \equiv -1 \bmod 11$ を示せ．

(2) p を素数とするとき $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ を示せ．

問 5 (一般問題)

X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．いま X の 2 元 x_1, x_2 に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ となるとき $x_1 \sim x_2$ と記す．Q を，この同値関係 $\sim$ による X の商集合とする．また，$\pi : X \ni x \mapsto [x] \in Q$ を自然な射影とする，ここで $[x]$ は x を含む同値類を表す．以下の問に答えよ．

(1) Q に商位相を入れたとき，

$$g([x]) = f(x)$$

で定義される Q から Y への写像 g は連続であることを示せ．

(2) Y が Hausdorff 空間ならば, 商位相空間 Q も Hausdorff 空間になることを示せ．

(3) 前問同様に Y が Hausdorff 空間で，さらに f が全射かつ X はコンパクトとすると，(1) で定義した写像 g は，商位相空間 Q から Y への同相写像になることを示せ．ただし，以下の 3 つの事実を用いてもよい．

(a) コンパクト空間の連続写像による像はコンパクト,

(b) コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト,

(c) Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合.

問 6 (一般問題)

C^2 級の実数値関数 $u(x,t)$ が方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0)$$

をみたすとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $u(x,t)$ が $\mathbb{R}$ 上の関数 $v(y)$(ただし $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$) を用いて

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{S}$$

と表されていたと仮定する．このとき $v(y)$ は

$$\frac{1}{2}(yv(y))' + v''(y) = 0$$

をみたすことを示せ．ただし $'$ は y に関する微分を表す．

(2) $u(x,t)$ が (S) の形で与えられ，さらに

$$u(0,1) = 1, \qquad \lim_{|x|\to\infty} x\, u(x,t) = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

をみたすとき，$u(x,t)$ を求めよ．

問 7 (一般問題)

次の線形計画問題 $\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)$ を考える．

$$\mathcal{P}(\theta_1,\theta_2)\quad \begin{array}{lcrrrcl} \text{最大化} & : & (8+3\theta_1+\theta_2)x_1 & +(5+\theta_1+3\theta_2)x_2 & +6x_3 & & \\ \text{制約} & : & 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & \leq & 8 \\ & & -3x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{P}(0,0)$ の最適解と最適値を求めよ．

(2) $\mathcal{P}(0,0)$ の最適解が $\mathcal{P}(\theta_1,\theta_2)$ の最適解でもあるような $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$ を集めた集合を $\mathcal{F}$ とする．この $\mathcal{F}$ は，

$$\mathcal{F} = \left\{(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1\theta_1 + \beta_1\theta_2 \leq \gamma_1, \alpha_2\theta_1 + \beta_2\theta_2 \leq \gamma_2\right\}$$

と θ_1, θ_2 に関する 2 個の線形不等式からなる集合で記述できるが，このときの $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ を求めよ．

問 8 (一般問題)

実数値確率変数の集合 $\Phi = \{X_1, X_2, \ldots\}$ が以下の (i), (ii) を満たすとき，問 (1)–(3) に答えよ．ただし，P は確率，E は期待値を表し,「区間」は実数の開区間，閉区間，半開区間，およびそれらの高々可算個の和集合を表すものとする．

(i) X_1, X_2, $\ldots$ のうち，その値が区間 C に入るものの数を $N(C)$ とすると，

$$\mathsf{P}\big(N(C) = k\big) = \mathrm{e}^{-|C|}\,\frac{|C|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ここに $|C|$ は区間 C の長さを表す．

(ii) 任意の自然数 n と互いに排反な区間 C_1, C_2, $\ldots$, C_n，非負整数 k_1, k_2, $\ldots$, k_n に対して，

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big(N(C_1) = k_1,\ N(C_2) = k_2,\ \ldots,\ N(C_n) = k_n\big)\\ &= \mathsf{P}\big(N(C_1) = k_1\big)\,\mathsf{P}\big(N(C_2) = k_2\big)\cdots\mathsf{P}\big(N(C_n) = k_n\big)\end{aligned}$$

(1) 実数 s と有界な区間 C に対して，$\mathsf{E}\big(s^{N(C)}\big) = \mathrm{e}^{-(1-s)\,|C|}$ が成り立つことを示せ．

(2) n を自然数として，互いに排反で有界な区間 C_1, C_2, $\ldots$, C_n と実数 s_1, s_2, $\ldots$, s_n を用いて，関数 f を以下で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} s_i, & x \in C_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\\ 1, & x \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i \end{cases}$$

このとき，

$$\mathsf{E}\Big(\prod_{X_j \in \Phi} f(X_j)\Big) = \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{n}(1 - s_i)\,|C_i|\Big\}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 実数の集合 $\mathbb{R}$ から $[0, 1]$ への連続関数 g について $\{x \in \mathbb{R} : g(x) < 1\}$ が有界であるとき，

$$\mathsf{E}\Big(\prod_{X_j \in \Phi} g(X_j)\Big) = \exp\Big\{-\int_{-\infty}^{\infty}\big(1 - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big\}$$

が成り立つことを示せ．

(まず，$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{n}, & \dfrac{i}{n} \le g(x) < \dfrac{i+1}{n},\ \ i = 0, 1, \ldots, n-1,\\ 1, & g(x) = 1 \end{cases}$ について考える．このとき，極限と期待値の順番，極限と積分の順番は，証明なしで交換して構わない．)

問 9 (一般問題)

２つのコインがある．コインを投げた時，１つ目のコインは表が出る確率と裏が出る確率がそれぞれ $1/2$ で，２つ目のコインは表が出る確率が p で裏が出る確率が $1-p$ である．今，これらのコインを同時に投げるという試行を独立に n 回繰り返す．
i 回目のコイン投げの結果に対し，Z_i を次のように定める：

$$Z_i = \begin{cases} 1 & (\text{２つのコイン両方が表}), \\ 2 & (\text{２つのコインの片方のみが表}), \\ 3 & (\text{２つのコイン両方が裏}). \end{cases}$$

n 回の試行の後，$\{Z_i\}_{i=1}^n$ のうち Z_i が k であった回数を X_k $(k = 1, 2, 3)$ とする．今，$X = (X_1, X_2, X_3)$ の値から p を推定したい．以下の問に答えよ．なお，導出の過程も記述すること．

(1) $(X_1, X_2, X_3) = (n_1, n_2, n_3)$ となる確率を求めよ．ただし，n_1, n_2, n_3 は $n = \sum_{k=1}^3 n_k$ なる非負整数とする．

(2) X_1, X_2, X_3 の期待値をそれぞれ求めよ．

(3) $(X_1, X_2, X_3) = (n_1, n_2, n_3)$ が観測されている．$n_1 + n_3 \neq 0$ のとき，p の最尤推定量 $\hat{p}$ を求めよ．

(4) $n_1 + n_3 = 0$ ならば $\hat{p} = 1/2$ とする．このとき，$\hat{p}$ の期待値を求めよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ の言語を考える．以下では a, x, y 等は Σ 上の語（つまり 0,1 の有限列），A, B, X, Y 等は Σ 上の言語（つまり語の集合）を表す．語 a の長さを $|a|$ と書く．ε は空語（長さ 0 の語）を表す．

(1) 言語 X, Y に対して $X \oplus Y$ を次で定める．

$$X \oplus Y = \{z \ : \ (\exists x \in X)(\exists y \in Y)\big(|x| = |y| \text{ かつ } z = xy\big)\}.$$

たとえば A が正規表現 $(0011)^*$ で表される言語，B が正規表現 $(01)^*$ で表される言語ならば

$$A \oplus B = \{\varepsilon, 00110101, 0011001101010101, \ldots\}$$

である．すると次の命題は成り立たない．

X, Y が正規言語ならば $X \oplus Y$ も正規言語である．

この命題の反例を挙げ，それが反例であることをポンピング補題（注 1 ）を用いて証明せよ．

(2) 以下では $\langle a \rangle_i$ は語 a の先頭から i 番目の文字を表す．たとえば $a = 110$ の場合，$\langle a \rangle_1 = 1$, $\langle a \rangle_2 = 1$, $\langle a \rangle_3 = 0$ である．語 a, x, y が次の 2 条件を満たすとき「a は x と y の選接である」と言う．

- $|a| = |x| = |y|$.
- a の長さを n としたとき，$1 \leq i \leq n$ となるどんな i についても

$$\langle a \rangle_i = \langle x \rangle_i \text{ または } \langle a \rangle_i = \langle y \rangle_i$$

が成り立つ．

そして言語 X, Y に対して $X \otimes Y$ を次で定める．

$$X \otimes Y = \{z \ : \ (\exists x \in X)(\exists y \in Y)\big(z \text{ は } x \text{ と } y \text{ の選接である}\big)\}.$$

たとえば A, B がさきほどと同じく $(0011)^*$ と $(01)^*$ ならば

$$A \otimes B = \{\varepsilon, 0001, 0011, 0101, 0111, 00010001, 00010011, \ldots\}$$

である．すると次の命題が成り立つ．

X, Y が正規言語ならば $X \otimes Y$ も正規言語である．

これを示すために，X を受理する（認識する，とも言う）有限オートマトン（注 2 ）と Y を受理する有限オートマトンから $X \otimes Y$ を受理する有限オートマトンを作る方法を説明せよ．

【次ページに注あり】

【注１：ポンピング補題】言語 X が正規であるならば，X に対して以下の条件を満たす自然数 p（ポンピング長）が存在する．

$$\forall w\Big[\Big(w \in X \text{ かつ } |w| \geq p\Big) \text{ ならば } \exists x \exists y \exists z\Big(w = xyz,\ |xy| \leq p,\ |y| > 0,\ \text{かつ } (\forall n \in \mathbb{N})(xy^n z \in X)\Big)\Big].$$

ただし $\mathbb{N}$ は自然数全体 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ であり y^n は n 個の y の連接である．

【注２：有限オートマトン】有限オートマトンとは状態の有限集合 Q，遷移関数 T，初期状態 s，受理状態集合 F を合わせた (Q, T, s, F) である．ただし $s \in Q$, $F \subseteq Q$ であり，決定性の場合には T は $Q \times \Sigma$ から Q への関数，非決定性の場合には T は $Q \times \Sigma$ から $\mathcal{P}(Q)$ への関数である（$\mathcal{P}(Q)$ は Q のベキ集合）．

問 11 (一般問題)

次のような計算問題を考える．

ナップザック問題
入力：n 組の重さと価値の情報 $(w_1, v_1), \ldots, (w_n, v_n)$ と制限重量 W．
注）すべての値は正の整数とする．
出力：$\max\{\sum_{i \in S} v_i \,:\, S \subseteq \{1, \ldots, n\} \wedge \sum_{i \in S} w_i \leq W\}$.

この問題に対し，$\mathtt{maxval}(n, W)$ を計算すると答えが求まるように，C プログラムの関数 maxval を次のように再帰的に定義した．ただし，配列 v, w は大域変数で，入力データ $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_n$ が，$\mathtt{v}[1], \ldots, \mathtt{v}[n]$, $\mathtt{w}[1], \ldots, \mathtt{w}[n]$ に格納されているものとする．

```
int maxval(int now_n, int now_W) {
   int val0, val1 = 0;
   if( now_n <= 0 ) return 0;
   val0 = maxval( now_n - 1, now_W );
   if( w[now_n] <= now_W ) {
      val1 = maxval( now_n - 1, now_W - w[now_n] ) + v[now_n];
   }
   if( val0 > val1 ) {
      return val0;
   } else {
      return val1;
   }
}
```

以下の問に答えよ．

(1) 与えられた n' と W'（ただし，$1 \leq n' \leq n$，$0 \leq W' \leq W$）に対し，$\mathtt{maxval}(n', W')$ の値が何になるかを説明せよ．

(2) この関数をそのまま実行すると時間がかかってしまう．それは同じ引数値に対する関数呼び出しを何度もするからである．その呼び出し回数を評価するために，たとえば，$v_1 = \cdots = v_n = 10$, $w_1 = \cdots = w_n = 1$, $W = n$ が，入力データとして与えられたときの計算を考える．$\mathtt{maxval}(n, n)$ を実行したときに，$\mathtt{maxval}(n-x, n-y)$ が呼び出された回数を $t_n(x, y)$ と表すことにする．たとえば，$t_n(0, 0) = 1$ であり，$x < y$ ならば $t_n(x, y) = 0$ である．$t_n(x, y)$ を求める漸化式を導け．

(3) 前問で定義した $t_n(x, y)$ が，任意の n，そして任意の x, y, $0 \leq y \leq x \leq n$, に対し $t_n(x, y) = \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$ となることを示せ．さらに，その事実を用い，任意の偶数 n に対して，$t_n(n, n/2)$ の上界となるような n に関する多項式は存在しないことを示せ．

(4) 大域変数の表 $\mathtt{M}[n+1][W+1]$ を用意し，$\mathtt{maxval}(n', W')$ の値が求まる度に，その値を $\mathtt{M}[n'][W']$ に入れて再計算を防ぐようにプログラムを改良した．その場合に，$\mathtt{maxval}(n, W)$ の実行にかかる計算時間のオーダー表記による見積りを n, W を用い

て示せ．なお，上記のプログラム中で使われているような基本演算は定数時間でできるものと仮定してよい．

問 12 (一般問題)

(1) オペレーティングシステムの機能である仮想記憶にて，メモリからディスクに退避させるページを決める際に用いられる LRU（Least Recently Used）方式を説明せよ．

以下の問にて，data は 1000 行，1000 列の 2 次元配列である．data[i][···] の全要素を第 i 行と呼ぶ．この配列の個々の行は，それぞれ異なる 1 つの論理ページ（仮想ページ）に配置されているとする．物理メモリのページ数は 10，仮想記憶の管理には LRU 方式を用いるとする．ページフォールトは data の読み書きでのみ起き，data[···][···] の 1 要素は 1 回のメモリアクセスで読み出せるとする．

(2) 次のプログラムを実行することを考える．

```
sum = 0;
for (i = 0; i < 1000; i++) {
  for (j = 0; j < 1000; j++) {
    sum = sum + data[i][j];
  }
}
```

ページフォールトの発生回数，および，その理由を答えよ．プログラムを実行する前は，配列 data が配置されているどのページも物理メモリに載っていないものとする．

(3) 上記プログラムの 4 行目を次の通りに変更した場合のページフォールト発生回数，および，その理由を答えよ．

```
    sum = sum + data[j][i];
```

(4) 次のプログラムを実行することを考える．

```
sum = 0;
for (i = 0; i < 1000000; i++) {
  j = random1000();  // 0 から 999 までの乱数
  k = random1000();
  sum = sum + data[j][k];
}
```

ページフォールト発生回数の期待値，および，その理由を答えよ．ここで，random1000 は 0 から 999 までの整数の乱数を返す関数である．プログラムを実行する前の時点で，配列 data が配置されているページのうちランダムに選ばれた 10 ページが物理メモリに載っているとする．

(5) 仮想記憶の管理に FIFO（First-In First-Out）方式を用いるとすると，LRU 方式を用いる場合と比較して，ページフォールト発生回数は同じとなるか，それとも異なるか，上記 (2)，(3)，(4) それぞれについて答えよ．

専門科目 (午前)　　27　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

n 次実対称行列 A の最大（実数）固有値を λ_1 とよぶ．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$|\boldsymbol{x}| \in \mathbb{R}^n$ は要素ごとの絶対値からなるベクトルとする．つまり，$|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)^\top$ であり，$\top$ はベクトルの転置を表す．また，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の全ての要素が正であることを意味し，同様に，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ は全ての要素が非負であることを意味する．

(1) n 次実対称行列 A が与えられたとき，

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}}$$

となることを示せ．

(2) 次の対称行列 A の最大固有値 λ_1 とその固有ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 全ての要素が正の実数である n 次対称行列の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$A|\boldsymbol{x}| - |\lambda||\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$$

となることを示せ．

(4) 全ての要素が正の実数である n 次対称行列の最大固有値 λ_1 に対する固有ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}$ とすると，

$$A|\bar{\boldsymbol{x}}| = |\lambda_1||\bar{\boldsymbol{x}}| \quad \text{および} \quad |\bar{\boldsymbol{x}}| > \boldsymbol{0}$$

となることを示せ（$|\lambda_1| > 0$ に注意せよ）．

問 2 (基礎問題)

自然数 n に対し，

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

とおく．$x > 0$ に対し $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ であることを用いて，以下を示せ．

(1) 任意の $n \geq 1$ について，

$$0 < a_n - a_{n+1} < \frac{1}{2n(n+1)}$$

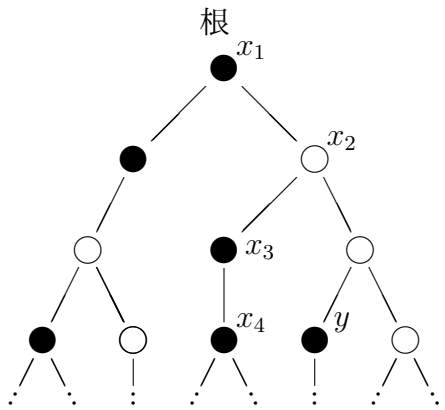
が成り立つ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は収束する．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{2}$

問 3 (基礎問題)

可算無限個の頂点を持つ根付き木で，各頂点が必ず 1 個または 2 個の子を持ち（したがって葉は存在しない），頂点がそれぞれ白色か黒色になっている木を**色付無限 2 分木**と呼ぶ．根から出発してその子，そのまた子，... とたどっていく頂点の無限列を**パス**と呼ぶ．頂点 x, y が同一のパス上にあり y の方が根から遠いとき，y は x の**子孫**であると言う．下図は色付無限 2 分木の例である．この図で $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ はひとつのパスであり，x_1, x_3, x_4 は黒色，x_2 は白色であり，y は x_1 と x_2 の子孫であるが x_3 や x_4 の子孫ではない．以下では n, m 等は自然数を表す変数，x, y 等は頂点を表す変数とする．



(1) 色付無限 2 分木に関する下記の 3 条件 A,B,C の相互の強弱関係を完全に決定せよ．すなわち次の 6 個の命題

「A ならば B」「B ならば A」「A ならば C」「C ならば A」「B ならば C」「C ならば B」

がそれぞれが正しいか正しくないかを述べよ（注 1）．そして正しくない場合は反例となる色付無限 2 分木を提示せよ．正しい場合にそのことを証明する必要はない．

【A】あるパスが存在して，そのパス上に黒色の頂点が無限個存在する．

【B】あるパス $x_1, x_2, \ldots$ が存在して次が成り立つ．

$\exists m(x_m$ は黒色) かつ $\forall n(x_n$ が黒色ならば x_{n+1} も黒色).

【C】黒色の頂点が無限個存在する．

(2) 次の条件 D が上記の条件 C と同値であることを証明せよ（注 2）．

【D】あるパス $x_1, x_2, \ldots$ が存在して次が成り立つ．

$\forall n \exists y(y$ は x_n の子孫であり y は黒色).

（つまりこのパス上のどんな頂点も黒色の子孫を持つ．ただしその子孫がこのパス上にある必要はない.）

（注 1）たとえば「A ならば B」が正しいとは，任意の色付無限 2 分木 T に対して次が成り立つことである．

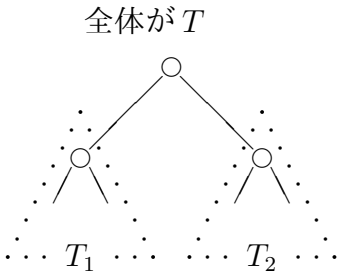
もしも T が条件 A を満たすならば，T は条件 B も満たす．

（次ページに続く）

（注２）証明の際に次の事実を使用してもよい．

事実１：　色付無限２分木 T 中に頂点 y があるとき，T の頂点のうち y を子孫とするものの個数は有限である．

事実２：　色付無限２分木 T が下図のように部分木 T_1 と T_2 を持つとする．もしも T に黒い頂点が無限個存在するならば，T_1 と T_2 の少なくとも一方には黒い頂点が無限個存在する．



問 4 (一般問題)

位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，その乗法群，すなわち積に関して逆元のある要素からなる群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ で表す．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元および $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元は，整数が同値類を表すこととすれば，たとえば $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，また $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = \{1, 2, 3, 4\}$ である．このとき以下に答えよ．

(1) 乗法群 $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ について，元 $x = 7$ の逆元 y を求めよ．

(2) 乗法群 $(\mathbb{Z}/40841\mathbb{Z})^\times$ について，元 $x = 20100$ の逆元 y を求めよ．

問 5 (一般問題)

X, Y を位相空間とし，f と g を共に X から Y への連続写像とするとき，以下に答えよ．

(1) X から $Y \times Y$ への写像

$$\Phi : X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in Y \times Y$$

は連続写像になることを示せ．

(2) $Y = \mathbb{R}$ のとき，2 つの関数の和と積 $f + g$ と fg は，共に連続関数になることを示せ．

(3) Y がハウスドルフ空間のとき，集合

$$A = \{x \in X\,;\, f(x) = g(x)\}$$

は，閉集合であることを示せ．

問 6 (一般問題)

$[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $u(t,x)$ が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,x)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)$$

を満たしているとする．ここで，$f(x)$，$g(x)$ は，$|x|\geq 1$ で

$$f(x)=0,\quad g(x)=0$$

を満たす関数とする．

(1) $\xi=x+t$，$\eta=x-t$ に対して，$v(\xi,\eta)=u(t,x)$ とおくとき，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial\xi}=0$$

であることを示せ．

(2) $u(t,x)$ を $f(x)$，$g(x)$ を用いて表せ．

(3) $t=1$，$|x|\geq 2$ のとき，

$$u(1,x)=0$$

であることを示せ．

(4) すべての $t>0$ に対して，$|x|\geq M(t)$ のとき，

$$u(t,x)=0$$

となる関数 $M(t)$ の例を一つ挙げよ．

問 7 (一般問題)

図 1 のネットワークを考える．ここで，各枝についている数字はその枝の矢印の向きに流すことができる容量である．例えば，枝 $(3,4)$，つまり頂点 3 から頂点 4 への矢印は，頂点 3 から頂点 4 の方向に最大 7 の流量を流せることを示している．

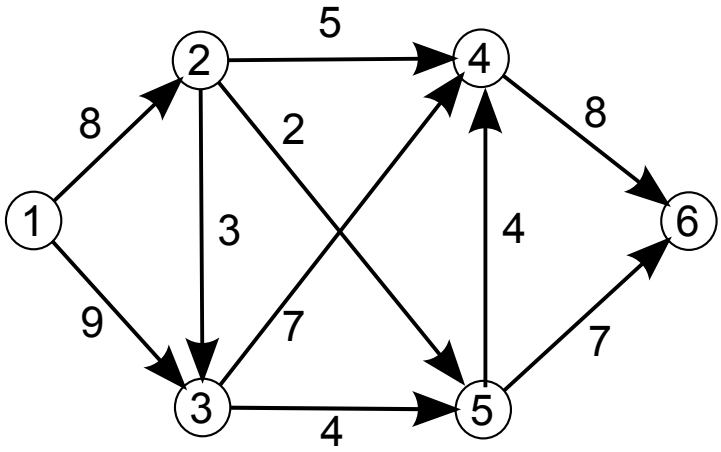


図 1: ネットワーク

図 1 のネットワークについて，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量を求める最大流問題を考えるとして，以下に答えよ．

(1) 図 1 の最大流問題の最大流量を求めよ．

(2) 図 1 のネットワークにおいて頂点 1 と頂点 6 を分割するカットのうち，容量が最小となる最小カットとその容量を答えよ．

(3) 枝 $(3,5)$ の最大容量を 4 から 3 に図 1 から変更したとき，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量が (1) で求めた最大流量と同じであるかどうかを，理由をつけて述べよ．

(4) 枝 $(5,4)$ の最大容量を 4 から 3 に図 1 から変更したとき，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量が (1) で求めた最大流量と同じであるかどうかを，理由をつけて述べよ．

問 8 (一般問題)

P，E，Var はそれぞれ確率，期待値，分散を表すものとする．また，事象の列 $B_1, B_2, \ldots$ が単調増加列 ($B_n \subset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$)，$C_1, C_2, \ldots$ が単調減少列 ($C_n \supset C_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$) であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(C_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big)$$

が成り立つことは証明なしで用いて構わない．

(1) 非負実数値をとる確率変数 X と任意の $a > 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\mathsf{P}(X > a) \leq \frac{\mathsf{E}(X)}{a}$$

(2) $A_1, A_2, \ldots$ を事象の列とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$ であれば，

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $X_1, X_2, \ldots$ を実数値確率変数列とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Var}(X_n) < \infty$ であれば，

$$\mathsf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} |X_n - \mathsf{E}(X_n)| = 0\Big) = 1$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 任意の $\epsilon > 0$ に対して $A_n = \{|X_n - \mathsf{E}(X_n)| > \epsilon\}$ とおいて，(1), (2) を用いる)．

問 9 (一般問題)

$N(\mu, \sigma^2)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布とする．次のモデルにしたがって確率変数 (X_1, X_2) が生成されているとする:

$$X_1 \sim N(0, \sigma^2),$$
$$X_2 = \beta X_1 + U.$$

ただし，U は $N(0,1)$ に従う X_1 とは独立な確率変数であり，$\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ は未知パラメータで，$\sigma^2 > 0$, $|\beta| < 1$ を満たすものである．なお，$X_1 \sim N(0, \sigma^2)$ は X_1 が $N(0, \sigma^2)$ から生成されているという意味である．今，観測値 (X_1, X_2) から β, σ^2 を推定したい．次の問に答えよ．

なお，平均 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, 分散共分散 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の d 次元多変量正規分布の確率密度関数が次式で与えられることは用いて良い:

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

ここで，$\top$ はベクトルの転置を表す．

(1) X_1 と X_2 の周辺分布が等しいためには，σ^2 と β は $\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の関係を満たさなくてはいけないことを示せ．

(2) (X_1, X_2) の同時分布を求めよ．ただし，$\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の条件は満たされているとし，未知パラメータは β のみを用いて記述せよ．

(3) 観測値 (X_1, X_2) にもとづいて，β の最尤推定量を求めよ．なお，$\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の条件は満たされているものとする．

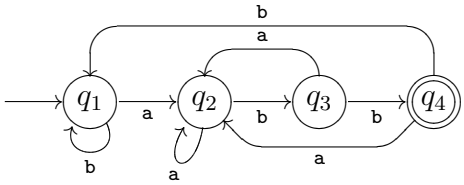
問 10 (一般問題)

アルファベット $\Sigma = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$ 上の言語 A, B, C を以下のように定義する．

$A = \{w \mid w$ は 0 を偶数個含む $\}$
$B = \{w \mid w$ は 00 を偶数個含む $\}$
$C = \{w \mid w$ は 001 と 110 を同じ個数含む $\}$

例えば，文字列 $w_1 = \mathtt{0001}$ は 0 を 3 つ含むため言語 A に含まれないが，00 を 2 つ含むため言語 B に含まれる．また，001 を 1 つ含むが 110 を 1 つも含まないため言語 C に含まれない．
また例えば，文字列 $w_2 = \mathtt{001000}$ は 0 を 5 つ含むため言語 A に含まれず，00 を 3 つ含むため言語 B にも含まれない．また，001 を 1 つ含み 110 を 1 つも含まないため言語 C に含まれない．
さらに例えば，文字列 $w_3 = \mathtt{001}$ は Σ 上の文字列ではないため，言語 A, B, C のどの言語にも含まれない．
これら言語 A, B, C の各々に対して，正規であるならば決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与え，正規でないならばポンピング補題 (注 2) を用いて証明せよ．

注 1: **決定性有限オートマトン**　以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w$ は abb で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: **ポンピング補題**　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) である．

問 11 (一般問題)

以下は $n \times n$ 行列の積を求める再帰的なアルゴリズムの枠組みである（ただし，非負整数 k に対して $n = 2^k$ とする）．パラメータ a ならびに関数 $f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ を定めると 1 つのアルゴリズムが定まる．ただし，関数 $f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ では，引数として与えられる部分行列同士の加減算しか行わないものとする．

```
mult(n, A, B)
// n は 2^k（ただし k は非負整数）とする.
// A, B には n × n 行列が与えられる. 行列の要素は整数とする.
    if n = 1 then return A * B;
    // 以下は n ≥ 2 の場合
    A = (A11 A12; A21 A22), B = (B11 B12; B21 B22) とする
    U1 ← f1(A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22);
    V1 ← g1(A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22);
    M1 ← mult(n/2, U1, V1);
     ⋮ （M2 ∼ Ma−1 を同様に計算）
    Ua ← fa(A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22);
    Va ← ga(A11, A12, A21, A22, B11, B12, B21, B22);
    Ma ← mult(n/2, Ua, Va);
    C11 ← h11(M1, ..., Ma); C12 ← h12(M1, ..., Ma);
    C21 ← h21(M1, ..., Ma); C22 ← h22(M1, ..., Ma);
    return (C11 C12; C21 C22);
// 関数 mult の定義終了
```

たとえば，$a = 8$ として，

$$
\begin{aligned}
f_1(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{11}, & g_1(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{11}, \\
f_2(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{12}, & g_2(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{21}, \\
f_3(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{11}, & g_3(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{12}, \\
f_4(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{12}, & g_4(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{22}, \\
f_5(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{21}, & g_5(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{11}, \\
f_6(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{22}, & g_6(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{21}, \\
f_7(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{21}, & g_7(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{12}, \\
f_8(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{22}, & g_8(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{22}, \\
h_{11}(M_1, M_2, \ldots) &= M_1 + M_2, & h_{12}(M_1, M_2, \ldots) &= M_3 + M_4, \\
h_{21}(M_1, M_2, \ldots) &= M_5 + M_6, & h_{22}(M_1, M_2, \ldots) &= M_7 + M_8,
\end{aligned}
$$

とすれば，標準的な行列積のアルゴリズムが得られる．

（次ページに続く）

この枠組みで定義されるアルゴリズムの計算量として，そのアルゴリズムで $n \times n$ 行列の積を計算するときの行列の要素間の乗算の回数に基づく計算量を $t(n)$，行列の要素間の加減算の回数に基づく計算量を $s(n)$ とする．また，パラメータ b を，$n \times n$ 行列の積を計算する際の，$f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ における部分行列同士の加減算の合計回数とする．すると，$s(n)$ は

$$s(n) \;=\; \begin{cases} 0 & n = 1 \text{ の場合} \\ as\left(\dfrac{n}{2}\right) + b\left(\dfrac{n}{2}\right)^2, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定義される．この計算量 $t(n)$, $s(n)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 計算量 $t(n)$ を上記の $s(n)$ のように定義せよ．

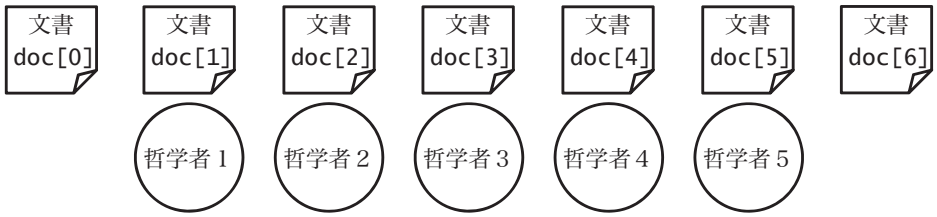
(2) この枠組みに沿って，パラメータ a と関数 $f_1, \ldots, f_a$, $g_1, \ldots, g_a$, $h_{11}, \ldots, h_{22}$ を上手く定義し，ある定数 α（ただし，$0 < \alpha < 3$）に対し，$t(n) = O(n^\alpha)$ を実現するアルゴリズムを得ることができた．その時の a と α の関係について述べよ．

(3) 例に挙げた $a = 8$ の場合には，部分行列同士の加減算は $h_{11}, \ldots, h_{22}$ でしか行われず，$n \times n$ 行列同士の積を計算する際の，$f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ における部分行列同士の加減算の合計回数は 4 回である．つまり，$b = 4$ である．この事実を用い，この場合の計算量 $s(n)$ が，$O(n^3)$ であることを示せ．

問 12 (一般問題)

5 人の哲学者がテーブルに並んで座っており，全員が並行して，各自の前にある文書を更新するという状況を考える．その際，両隣りの文書も更新する必要があるとする．

(1) 哲学者達は，下図の通り，一列に並んでいるとする．文書は 7 つあり，そのうち 5 つは各哲学者の前にある．左端の哲学者の左隣り，および，右端の哲学者の右隣りにも，それぞれ，文書がある．



次のプログラムは，この状況を Java 言語で記述したものである．メソッド update は哲学者による更新処理を表す．哲学者 1 番から 5 番はそれぞれ update(1)，···，update(5) を繰り返し呼び出し続ける．

```
int doc[7];

static void update(int index) {
  // 配列 doc の index - 1 番目から index + 1 番目までの 3 要素
  // doc[index - 1], doc[index], doc[index + 1] を更新する
  ...
}
```

哲学者達の文書に対する競争状態（または競合状態，race condition）を避けるため，相互排除を行うことを考える．そのために，次の 2 通りのメソッドを用意し，update の代わりに呼び出す．ここでは，ロックを獲得する acquire 命令，解放する release 命令を使えるとする．acquire i は配列 doc の i 番目要素に対応するロックを獲得する命令である．

方法 A：

```
static void updateA(int index) {
  acquire index;
  acquire index - 1;
  acquire index + 1;

  update(index);

  release index + 1;
  release index - 1;
  release index;
}
```

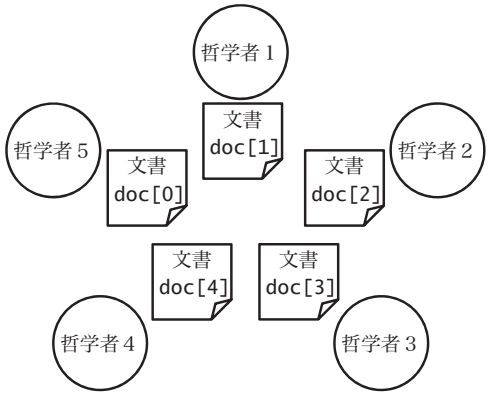
方法 B：

```
static void updateB(int index) {
  acquire index - 1;
  acquire index;
  acquire index + 1;

  update(index);

  release index + 1;
  release index;
  release index - 1;
}
```

（次ページに続く）

方法 A と方法 B のどちらか一方では，哲学者間でデッドロックが発生し得る．どちらで発生し得るか，答えよ．また，デッドロックに至るまでの過程の例を示せ．

(2) 次に，哲学者達は，下図の通り，輪になって並んでいるとする．文書は 5 つあり，各哲学者の前にある．



次のプログラムは，この状況を Java 言語で記述したものである．メソッド update は哲学者による更新処理を表す．哲学者 1 番から 5 番はそれぞれ update(1)，···，update(5) を繰り返し呼び出し続ける．哲学者 5 番の前にある文書は doc[0] で表されることに注意すること．

```
int doc[5];

static void update(int index) {
  // 配列 doc の 3 要素
  // doc[(index - 1)],
  // doc[(index)     % 5],
  // doc[(index + 1) % 5] を更新する
  ...
}
```

この update を対象として，方法 A と方法 B で相互排除を行うことを考える．この際，acquire 命令と release 命令の引数は，(1) にて index，index + 1 となっているところをそれぞれ index % 5，(index + 1) % 5 に置き換える．

この状況では，方法 A，方法 B，どちらの方法で相互排除を行ってもデッドロックが発生し得る．(1) の一列並びではデッドロックを起こさない方の方法においてデッドロックが発生する過程の例を示せ．

(3) 輪に並んだ (2) の状況でもデッドロックを防ぐ方法を示せ．示す方法は文章でもプログラムでもよい．各哲学者が獲得，解放できるロックは，方法 A，方法 B と同様に，自身の前にある文書および両隣りの文書に対応するものだけとする．

専門科目 (午前)　　26　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

問 1 (基礎問題)

n 次実正方行列 $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ をみたすとする．$\boldsymbol{P}$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像であると考えたとき，$\boldsymbol{P}$ の核を $\ker(\boldsymbol{P})$，$\boldsymbol{P}$ による像を $\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ とする．また $\boldsymbol{I}$ を n 次単位行列，$\boldsymbol{0}$ を n 次零ベクトルとする．さらに，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，標準的な内積 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ で表す．

(1) $\mathrm{range}(\boldsymbol{P}) \cap \ker(\boldsymbol{P}) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\ker(\boldsymbol{P}) = \mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ が成り立つことを示せ．

(3) $\boldsymbol{P}$ が対称行列であるとき，$\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ と $\mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ は直交することを示せ．

(4) ２つの部分空間 $\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ と $\mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ が直交するとき，$\boldsymbol{P}$ は対称行列であることを示せ．

問 2 (基礎問題)

$\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ で，関係式

$$f_{xy}(x,y)=0$$

をみたすものの全体の作る集合を A で表す．また，関係式

$$f_{xx}(x,y)-f_{yy}(x,y)=0$$

をみたすものの全体の作る集合を B で表す．ただし f_{xx}, f_{xy} および f_{yy} は f の 2 階偏導関数を表すものとする．このとき以下に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ が A に属するとき，$\mathbb{R}$ 上の C^∞-関数 $a(t)$ と $b(t)$ が存在し

$$f(x,y)=a(x)+b(y)$$

と書けることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ について $x=(u+v)/2$ かつ $y=(u-v)/2$ と変数変換をしたとき，f_{uv} を f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ．

(3) (1) で与えた形 $f(x,y)=a(x)+b(y)$ を A に属する関数の一般形とよぶことにする．(2) を用いて，B に属する関数の一般形を求めよ．

問 3 (基礎問題)

$\{0,1\}$ 上の 1 変数関数 TRUE，NOT，2 変数関数 AND，IMP，および 3 変数関数 NA，E を次の表で定める（E は入力中の 1 の個数が偶数であるとき 1 を返す）.

x	TRUE(x)	NOT(x)
0	1	1
1	1	0

x	y	AND(x,y)	IMP(x,y)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

x	y	z	NA(x,y,z)	E(x,y,z)
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

するとたとえば

$$\mathsf{TRUE}(x) = \mathsf{IMP}(x,x)$$

$$\mathsf{AND}(x,y) = \mathsf{IMP}(\mathsf{IMP}(x,\mathsf{IMP}(y,0)),0)$$

が成り立つ．すなわち x と IMP だけで TRUE(x) を表現することができ，$0,x,y$ と IMP だけで AND(x,y) を表現することができる．さらにこの後者において定数 0 は必要である，すなわち x,y と IMP だけでは AND(x,y) を表現できないことが知られている．

(1) 定数を使わずに x と NA だけで NOT(x) を表現せよ（表現を書くだけでよい）.

(2) 定数を使わずに x,y と NA だけで AND(x,y) を表現せよ（表現を書くだけでよい）.

(3) 定数を使わずに x と E だけでは TRUE(x) を表現できないことを証明せよ.

問 4 (一般問題)

位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，その乗法群，すなわち積に関して逆元のある要素からなる群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ で表す．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元および $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元は，整数が同値類を表すこととすれば，たとえば $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$，また $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{1\}$，$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times = \{1, 2\}$，$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{1, 3\}$ である．このとき以下に答えよ．

(1) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ の位数を求め，単位元以外の元の位数は 2 であることを示せ．

(2) $(\mathbb{Z}/84\mathbb{Z})^\times$ の位数と，位数 2 の元の個数を求めよ．

問 5 (一般問題)

0 または 1 の無限列からなる集合

$$X = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) : \ x_i = 0 \text{ または} 1\}$$

と，$X \times X$ 上で定義される実数値関数

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

について，以下に答えよ.

(1) d は X 上の距離関数であることを示せ.

(2) 以下の式で定義される写像 $f : X \to X$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

は，d が定める位相に関して連続であることを示せ.

(3) n を正の整数とし，(2) で定義した f を n 回反復（合成）して得られる写像を f^n で表す．さらに，X の点 y がある正の整数 n について $f^n(y) = y$ をみたすとき，$y \in X$ を f の周期点とよぶ．X の任意の点 x について，f の周期点の列があって，d が定める位相に関して x に収束することを示せ.

問 6 (一般問題)

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体からなる線型空間 $C[0,1]$ に，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_1$ を導入したノルム空間をそれぞれ N_∞，N_1 で表す．ただし，

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

である．このとき以下に答えよ．

(1) N_∞ と N_1 が実際にノルム空間になることを示せ．

(2) N_∞ はバナッハ空間になることを示せ．

(3) 正の整数 n に対し，関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & (\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1) \end{cases}$$

によって定義する．関数列 $\{f_n\}$ は $\|\cdot\|_1$ でコーシー列になることを示せ．

(4) N_1 はバナッハ空間になるか否か，証明をつけて答えよ．

問 7 (一般問題)

以下の最適化問題 $(\mathcal{P}_\theta)$ を考える.

$$
(\mathcal{P}_\theta) \quad \begin{array}{lcl} \text{最小化} & : & (1+\theta)x_1 - 4x_2 + \max\{5x_1 + 2x_2 - 4,\ 7x_1 + 3x_2 - 8,\ 0\} \\ \text{制約} & : & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}
$$

以下の問いについて答えよ.

(1) $\theta = 0$ の場合に, $(\mathcal{P}_\theta)$ を 1 つの線形計画問題の基準形あるいは標準形に帰着せよ.

(2) (1) で得られた線形計画問題をシンプレックス法で解き, $\theta = 0$ の場合の最適解 (x_1^*, x_2^*) を求めよ.

(3) θ を変動させたときに, $(\mathcal{P}_\theta)$ の最適解が (2) で得られた (x_1^*, x_2^*) のままとなる θ の範囲を求めよ.

問 8 (一般問題)

X を $[0,1)$ 上の一様分布にしたがう確率変数とし，X の値を無限小数展開したとき，小数第 n 位の数を表す確率変数を X_n とする $(n=1,2,\ldots)$．すなわち，各 X_n は $0,1,2,\ldots,9$ のいずれかの値をとり，

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{10^n}$$

が成り立つ (ただし，$0.009999\cdots=0.010000\cdots$ のように 2 通りの展開の仕方がある場合は後者のほうを採用する).

(1) 任意の n に対して，X_n が $\{0,1,2,\ldots,9\}$ 上の離散一様分布にしたがうことを示せ.

(2) 任意の n に対して，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ が互いに独立であることを示せ.

(3) 確率変数 Y_n $(n=1,2,\ldots)$ を

$$Y_n=\begin{cases}0 & (X_n=0 \text{ のとき})\\ 1 & (X_n=1,2,\ldots,9 \text{ のとき})\end{cases}$$

によって与えたとき，確率変数 $Y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{10^n}$ の期待値を求めよ.

問 9 (一般問題)

(1) k を正整数，$0 < p < 1$ を実数とする．成功率 p の独立ベルヌイ試行列 $X_1, X_2, \ldots$ において，k 回目の 1 が現れるまでの試行回数を $k + Y$ とする．確率変数 Y の確率関数は

$$p_k(i) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

になることを示せ．この離散確率分布をパラメータ (k, p) の負の二項分布 $\mathrm{NB}(k, p)$ とよぶ.

(2) $\mathrm{NB}(k, p)$ に従う確率変数 Y の平均は

$$\mathbf{E}\{Y\} = \frac{k(1-p)}{p}$$

となることを示せ.

(3) k は既知とする．$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を $\mathrm{NB}(k, p)$ に従う互いに独立な確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の実現値とする．(2) の関係を用い， p のモーメント推定量 $\widehat{p}_{\mathrm{ME}}$ を標本平均 $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ と k を用いて表せ.

(4) (3) と同じ仮定の下で，パラメータ p の最尤推定量 $\widehat{p}_{\mathrm{MLE}}$ を求めよ.

問 10 (一般問題)

アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ の言語を考える．x が文字列で n が自然数のとき，x^n は x の n 個の連接を表す.

(1) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 1\}$ とする．L_1 に対する文脈自由文法（注１）を示せ.

(2) $L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor} \mid n \geq 1\}$ とする．ただし $\lfloor r \rfloor$ は r 以下の最大の整数であり，具体的に L_2 は

$$\{\mathtt{ab}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaabbbb}, \mathtt{aaaabbbbbb}, \mathtt{aaaaabbbbbbb}, \mathtt{aaaaaabbbbbbbbb}, \ldots\}$$

である．L_2 に対する文脈自由文法を示せ.

(3) $L_3 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m, n \geq 1\}$ とする．L_3 は文脈自由言語でないことをポンピング補題（注２）を使用して証明せよ.

(4) $L_4 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n \mid m, n \geq 1\}$ とする．L_4 は文脈自由言語であるか否か述べ，文脈自由言語であるならばこれに対する文脈自由文法を示せ．文脈自由言語でないならば，そのことをポンピング補題を使用して証明せよ.

【注１：文脈自由文法】文脈自由文法は非終端記号，開始記号，および生成規則を示すことで与えられる．たとえばアルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, +, *, (,)\}$ のとき，以下のものは「$\mathtt{a}, \mathtt{b}$ から演算子 $+, *$ で構成される数式全体」に対する文脈自由文法になる.

- 非終端記号： $E,\ I$
- 開始記号： E
- 生成規則： $E \to I,\quad E \to E{+}E,\quad E \to E{*}E,\quad E \to (E),\quad I \to \mathtt{a},\quad I \to \mathtt{b}$

【注２：文脈自由言語に対するポンピング補題】L が文脈自由言語ならばある定数 p（ポンピング長）が存在して，条件「$z \in L$ かつ $|z| \geq p$」を満たすどんな文字列 z も下記の三条件を満たすように $z = uvwxy$ と分割できる（u, v, w, x, y はそれぞれ文字列である）.

(ア) $|vwx| \leq p$.

(イ) 任意の $i \geq 0$ に対して $uv^iwx^iy \in L$.

(ウ) $|v| + |x| > 0$.

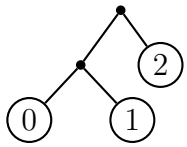
ただし $|s|$ は文字列 s の長さを表す.

問 11 (一般問題)

葉に整数を 1 つ持つような 2 分木 (以下では単に木と呼ぶ) を，次のような Java 言語のクラス Tree, Leaf, Node によって表すことにする．(※部は省略してあるが，本問では呼び出されることがないので気にしなくてよい．)

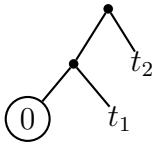
```
abstract class Tree {              //Tree クラスの宣言
    abstract int getV();           //抽象メソッド getV の宣言
    abstract Tree getL();
    abstract Tree getR();
}
class Leaf extends Tree {          //Leaf クラスを Tree の子として宣言
    int value;                     //value フィールド (インスタンス変数) 宣言
    Leaf(int v) { value=v; }       //コンストラクタ宣言
    int getV() { return value; } //getV メソッドの宣言
    Tree getL() { ※ }
    Tree getR() { ※ }
}
class Node extends Tree {
    Tree left, right;
    Node(Tree l, Tree r) { left=l; right=r; }
    int getV() { ※ }
    Tree getL() { return left; }
    Tree getR() { return right; }
}
```

このとき式 `new Node(new Node(new Leaf(0), new Leaf(1)), new Leaf(2))` は下図の木を作る．



次のように木を変形する規則 1 を考える．

規則 1:

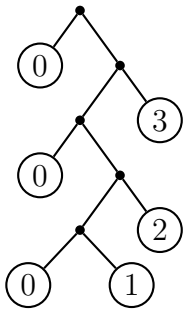


$\longrightarrow \quad t_1$ (t_1, t_2 は任意の木を表す．)

このとき，木の一部分に対して規則 1 を適用して変形した木を作りたい．以下の問いに答えよ．以下，部分木とはその木自身も含むこととする．

(1) 与えられた木 t に，規則 1 の左辺の形をした部分木が存在するかを判定するメソッド `hasRedex(t)` を定義せよ．(定義中で注 1 の `isRedex` を呼び出してもよい．)

(2) 以下の木から，規則 1 の左辺の形をした部分木を見つけ，その部分木を規則 1 の右辺で置き換えた木を書け．規則 1 の左辺の形をした部分木が複数ある場合は，そのうちの 1 つの部分木だけを置き換えることとする．その際すべての置き換え方で得られる木を別々に書け．



(3) 与えられた木 t から，規則 1 の左辺の形をした部分木を見つけ，その部分木を規則 1 の右辺で置き換えた木を返すメソッド reduce(t) を定義せよ．規則 1 の左辺の形をした部分木が複数ある場合は，そのうちの 1 つの部分木だけを置き換えることとする．その際どの部分木を置き換えてもよいものとする．t に規則 1 の左辺の形をした部分木が存在しない場合は t 自身を返す．部分木を置き換えた木を作る場合には，目的の形をした木を新しく作り直してもよいし，与えられた木の部分木を再利用してもよい．(定義中で注 1 の isRedex や (1) の hasRedex を呼び出してもよい．)

注 1: 与えられた木 t が規則 1 の左辺の形になっているかを判定するメソッド isRedex(t) は次のように定義できる．

```
static boolean isRedex(Tree t) {
    return (t                instanceof Node) &&
           (t.getL()         instanceof Node) &&
           (t.getL().getL()  instanceof Leaf) &&
           t.getL().getL().getV() == 0;
}
```

ここで t instanceof Node は，t の値が Node クラスのオブジェクトであるかを判定する式である．&& は論理積を求める演算子である．また，ここには使われていないが || は論理和を求める演算子である．

注 2: 解答としてメソッドを定義する際には，isRedex(t) のように適当なクラスに定義された static メソッドとして定義してよい．また定義の中で isRedex を呼び出してもよい．文法の厳密性はあまり気にしなくてよい．

問 12 (一般問題)

C 言語で書かれた次のプログラムを考える.

```
/* ヘッダファイルの記述は省略 */
void callee(int k) {
  int a = 0x1234;
  int i;

  /* 変数 a が格納されている番地から,
     順に, メモリの内容を 16 進数で表示する */
  for (i = 0; i < 12; i++) {
    printf("%x\n", *(&a + i));
  }
}

void caller(void) {
  callee(0x5678);
}
```

関数 caller を呼び出したところ, 次の出力が得られた.

```
1234
1
0
0
bfdb8388
8048485
5678
804858e
bfdb8394
45ce7d50
1
45c988f8
```

出力中の 5678 は関数 callee の引数であるという前提のもとで, 以下の設問に答えよ.

(1) 関数 callee の変数 a と i は局所変数である. 局所変数が大域変数とは異なる点を, 格納されるメモリ領域に着目して, １つ述べよ. なお, 解答の中で, 次の語のうち１つは用いること：スタックフレーム, スタック, ヒープ, スレッド.

(2) 上記の出力を得た際にプログラムの実行を行ったプロセッサにおいて, スタックに値をプッシュする命令を実行した場合, スタックポインタが保持する番地は増加するか, それとも減少するか, 答えよ. また, その根拠を述べよ.

(3) 関数 caller は, 関数 callee を, プロセッサが備える関数呼び出し命令（例：call 命令）で呼び出す. 関数呼び出し命令は, 関数 caller に戻る際の戻り番地（実行を

再開する番地）をスタックにプッシュするとともに関数 `callee` に実行を移す．この戻り番地は，次のうちのどれであると推測されるか?

(a) 8048485

(b) 45ce7d50

(c) 45c988f8

また，その根拠を述べよ．

専門科目 (午前)　　25　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

問 1 (基礎問題)

以下では，ベクトルや行列の成分はすべて実数とする．$n \times n$ 対称行列 A が半正定値であるとは，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} \geq 0$ となることである．ただし，$^\top$ はベクトルまたは行列の転置を表す．また，次の命題は証明なしで用いて構わない．

- 対称行列 A は適当な直交行列 U と対角行列 D を用いて $A = U\,D\,U^\top$ と表せる．
- 対称行列 A が半正定値であるための必要十分条件は，その固有値がすべて非負となることである．

(1) 任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^\top$ が半正定値となることを示せ．

(2) $n \times n$ 半正定値対称行列 A に対して $A = B^2$ を満たす半正定値対称行列 B が存在することを示せ (行列 B の一意性は示さなくてよい)．

$n \times n$ 対称行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}$ と定義する．

(3) $n \times n$ 対称行列 A が，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 X に対して $\langle A, X \rangle \geq 0$ を満たすならば，A もまた半正定値となることを示せ．(ヒント: (1) の結果を用いる．)

(4) 逆に $n \times n$ 対称行列 A が半正定値ならば，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 X に対して $\langle A, X \rangle \geq 0$ となることを示せ．(ヒント: (2) の結果を用いる．)

問 2 (基礎問題)

$x \in \mathbb{R}$ に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

(2) $f(x)$ は C^1 級であることを示せ.

(3) $f(x)$ は C^∞ 級か否かを述べよ.

問 3 (基礎問題)

以下では正の整数 $\mathbb{Z}^+$ から正の実数 $\mathbb{R}^+$ への関数のみを考える．任意の関数 f, g に対して，

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq n_0\ \ [f(n) \leq c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = O(g(n))$$

と定義する．また，任意の関数 f, g に対して，

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq n_0\ \ [f(n) \geq c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $1 + 3n \log_2 n = O(n^2)$ を定義にしたがって証明せよ．

(2) $f_1(n) = \Omega(g_1(n))$ かつ $f_2(n) = \Omega(g_2(n))$ ならば，$f_1(n) \cdot f_2(n) = \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$ であることを証明せよ．

(3) 次の命題は真であるか偽であるか? 真の場合は証明を与え，偽の場合は反例を挙げ，それが反例であることを説明せよ．

「任意の関数 f, g に対して，$f(n) = O(g(n))$ または $g(n) = O(f(n))$ である.」

問 4 (一般問題)

$\mathbb{Z}$ を整数のつくる加法群とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を位数 9 の巡回群とし，$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を自然な射影とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ について以下の問に答えよ．

(1) $\sigma(p(1)) = p(2)$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の位数を求めよ．

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の元の位数として表れる数を列挙せよ．

問 5 (一般問題)

D は整数を両端点にもつ開区間の全体とする．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相とする．さらに $\mathcal{O}$ の部分集合族 $\mathcal{O}_*$ を

$$\mathcal{O}_* = \left\{ \bigcup_{I \in S} I \,\middle|\, S \subset D \right\}$$

と定義する．つまり $\mathcal{O}_*$ に属する集合は空集合か，あるいは，端点が整数であるような開区間の和集合で表される．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_*$ を示せ．

(2) $\mathcal{O}_*$ は $\mathbb{R}$ の位相を定めることを示せ．

(3) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ はハウスドルフ空間になるか否かを述べよ．但し，与えられた位相空間 X がハウスドルフ空間であるとは，X の任意の相異なる 2 点 x, y に対して，X の開集合 U, V が存在し，$x \in U$ かつ $y \in V$ で，さらに $U \cap V$ が空集合となるとき，をいう．

(4) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ への連続写像で，$(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への写像とみなすと連続にならないような具体例を挙げよ．

問 6 (一般問題)

X を $C[0,\pi]$ にノルム $\|\phi\| = \max_{0\le s\le\pi}|\phi(s)|$ を導入して得られるバナッハ空間とする．$f \in C[0,\pi]$ に対して，積分方程式

$$x(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)dt = f(s) \qquad (*)$$

の解 x の存在を議論する．そのため，X から X への写像 F を

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)dt + f(s) \qquad (x \in X)$$

と定義する．

(1) F が線形写像となるための f の条件を求めよ．

(2) F は連続写像となるか否かを述べよ．

(3) 積分方程式 $(*)$ に解は存在するか否か，また，存在する場合には，その解はただ一つか否かを述べよ．

問 7 (一般問題)

地域 A および地域 B でそれぞれ 14 単位と 10 単位のガレキがあり，それらを受入れ自治体 C，D，E，F まで輸送して処理することを考える．受入れ自治体の処理能力は C が 3 単位，D が 6 単位，E が 10 単位，F が 5 単位である．地域 A，B でのガレキ総量と受入れ自治体 C，D，E，F での処理能力の総量が同じであることに注意せよ．地域 A，B から受入れ自治体 C，D，E，F への輸送コストは単位当たり次の表で与えられているとする．

		受入れ自治体			
		C	D	E	F
地域	A	5	8	7	6
	B	7	6	9	7

以下の問に答えよ．

(1) 全体の輸送コストを最小にするためにはこの問題をどのような線形計画問題として定式化しなければならないか．

(2) この問題の最適値および最適解を求めよ．

(3) (2) で求めた最適輸送ルートに基づき，それぞれの地域と受入れ自治体は個別にガレキの搬送と受入れの契約を結んだ．しかし，その後の調査で新たに地域 B のガレキが 10 単位から $10+\alpha$ 単位に増加することが分かり，自治体 C が処理能力を 3 単位から $3+\alpha$ 単位に増加できることを申し出た．地域・受入れ自治体間に新たな契約を結ぶことなく（輸送量 0 のルートは 0 を保ったまま），(それぞれの）搬送量・受入れ量だけを変更しても全体の輸送コストが最適であり続けるためには最大で α は何単位まで増加できるかを求めよ．

問 8 (一般問題)

自然数 n と実数 $T > 0$ に対して，実数 s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n \leq T$$

となるように選ぶ.

(1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を区間 $[0, T]$ 上の一様分布に従う互いに独立な n 個の確率変数とし，それらを小さい順に並べたものを $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ とする．次の確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < X_{(1)} \leq t_1, s_2 < X_{(2)} \leq t_2, \ldots, s_n < X_{(n)} \leq t_n\big) \qquad (*)$$

を n, T, s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ.

(2) 任意に固定した $t \geq 0$ に対して，$N(t)$ は以下の (a), (b), (c) を満たす確率変数であるとする.

(a) $N(0) = 0$.

(b) 任意の $0 \leq s \leq t$ に対して，$N(t) - N(s)$ は平均 $t - s$ のポアソン分布に従う．すなわち，

$$\mathsf{P}\big(N(t) - N(s) = k\big) = \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(c) 任意の $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots$ に対して，$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \ldots$ は互いに独立.

$Y_1, Y_2, \ldots$ を $Y_k = \inf\{t > 0 \mid N(t) \geq k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定めるとき，次の確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < Y_1 \leq t_1, s_2 < Y_2 \leq t_2, \ldots, s_n < Y_n \leq t_n\big)$$

を n, s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ.

(3) (2) において，$N(T) = n$ が与えられたときの条件付き確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < Y_1 \leq t_1, s_2 < Y_2 \leq t_2, \ldots, s_n < Y_n \leq t_n \,\big|\, N(T) = n\big)$$

が (1) の確率 (*) と等しいことを示せ.

問 9 (一般問題)

確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は共通の平均 μ を持ち，その共分散を $\mathrm{Cov}\{X_i, X_j\} = \sigma_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ とする．共分散 $\sigma_{i,j}$ はすべて既知として，未知の平均 μ をデータの線形結合（但し $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ とする）

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

で推定したい．以下の問に答えよ．

(1) 制約条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ の下で平均二乗推定誤差 $\mathbf{E}\{(\hat{\mu} - \mu)^2\}$ を最小化する解 $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$ が満たすべき線形方程式は，ラグランジュ未定乗数 λ を用いて

$$R \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \\ \lambda \end{pmatrix} = b$$

と表すことができる．共分散 $\sigma_{i,j}$ のみに依存する行列 R とベクトル b を求めよ．

(2) 上の線形方程式で定まる $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ を用いた $\hat{\mu}$ を $\hat{\mu}_0$ とする．$\hat{\mu}_0$ と μ の素朴な推定量 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の間には，等式

$$\mathbf{E}\{(\bar{X} - \hat{\mu}_0)(\hat{\mu}_0 - \mu)\} = 0$$

が成立することを証明せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix} \right\}$$

からなる言語を考える．例えば $w_1 = \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}$ や，$w_2 = \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}$ は Σ 上の文字列である．ここで，Σ 上の文字列は a と b からなる上下二つの行を与えると考える．すなわち，w_1 の上の行は “ab” であり，w_2 の下の行は “babaa” である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 言語

$$A = \{w \mid w \text{ の上の行は } \mathtt{a} \text{ で始まり}, w \text{ の下の行は } \mathtt{b} \text{ で終わる}\}$$

とする．言語 A を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．

(2) 言語

$$B = \{w \mid w \text{ の上の行は高々二つの } \mathtt{a} \text{ を含み}, w \text{ の下の行はちょうど二つの } \mathtt{b} \text{ を含む}\}$$

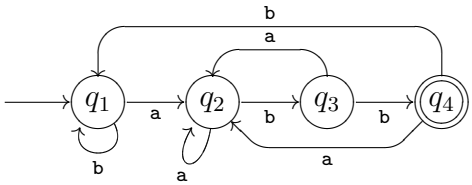
とする．言語 B を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．

(3) 言語

$$C = \{w \mid w \text{ の下の行は，上の行の逆文字列}\}$$

とする．上の例では $w_1 \in C$ であり $w_2 \notin C$ である．言語 C が正規でないことを，ポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

注 1: 決定性有限オートマトン　以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w \text{ は } \mathtt{abb} \text{ で終わる}\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する:

s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように三つの部分 $s = xyz$ に分割できる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$

3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字をひとつも含まない文字列) となる．

問 11 (一般問題)

次のような算術式の文法を考える．

E → E '+' T | E '−' T | T
T → T '∗' F | T '/' F | F
F → '(' E ')' | i

ここで，→と|と' はメタ記号である．' ' で囲まれたものと i は終端記号，E と T と F は非終端記号である．開始記号は E である．i（一般には i_1, i_2, ...）は識別子を表す.

(1) $(i_1 + i_2) * i_3$ の構文解析木を書け.

(2) $(i_1 + i_2) * i_3$ の抽象構文木を書け．ちなみに，抽象構文木は構文木とも呼ばれ，節として演算子，節の子供として節の演算子のオペランドが来るようにした木である.

(3) $(i_1 + i_2) * i_3$ の前置記法と後置記法（逆ポーランド記法）を書け．ちなみに,「i_1 + i_2」の前置記法は「+ i_1 i_2」，後置記法は「i_1 i_2 +」である．また，算術式の抽象構文木が与えられたとき，そこから前置記法および後置記法の式を作る方法のあらましを簡単に述べよ.

(4) 上の文法の再帰降下構文解析器を作りたい．しかし，上の文法には左再帰性があるため，そのままでは再帰降下構文解析器を作ることができない．そこで，同じ言語を受理する次の正規右辺文法というものに書き換える.

E → T (('+' | '−') T)* (#)
T → F (('∗' | '/') F)*
F → '(' E ')' | i

ここで，→と|と' と (と) と * はメタ記号である．正規右辺文法では，生成規則の右辺に文法記号の正規表現が書ける．たとえば，(#) の右辺は，T のあとに「+ か − が来て次に T が来る」が 0 回以上繰り返したものを表す.

E から導出される終端記号列を構文解析する手続き（関数，メソッド）parseE() を記せ．ここで，次のトークン（終端記号）が入った変数 nexttoken，次のトークンを読んで nexttoken に入れる手続き gettoken()，T から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseT() があるものとして良い.

parseE() や，parseT() や，F から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseF() は，それぞれ，E，T，F から導出される終端記号列の最初のトークンが nexttoken に入れられた状態で呼ばれ，終了時には，それぞれ E，T，F から導出される終端記号列の次のトークンが nexttoken に入れられた状態で終るとする.

parseE() の記述に用いるプログラミング言語は Java 風，C 風，C++風のどれでも良く，プログラミング言語による記述では文法の厳密性はあまり気にしなくて良い.

解答に際して適当な仮定を設けても良い．その場合は仮定を明記せよ.

参考として，F から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseF() を次に記す.

```
parseF() {
    switch (nexttoken) {
    case '(':
        gettoken(); parseE(); if (nexttoken == ')') gettoken() else error();
        break;
    case 'i': // 'i' とはトークン i に対する内部表現のこと
        gettoken(); break;
    default:
        error(); break;
    }
}
```

問 12 (一般問題)

メモリ上の値を 1 だけ増やす次のプログラム（アセンブリコード）を考える．

```
load   R1, m1     // R1 = m1
add    R1, R1, 1  // R1 = R1 + 1
store  m1, R1     // m1 = R1
```

プログラム中に現れる命令の形式と意味は，後述の表に示す通りである．

(1) メモリ空間を共有する n 個のスレッドが，それぞれ 1 度だけ，このプログラムを実行するという状況を考える．プログラム作成者の期待は m1 の値が n だけ増えるというものであるが，n 個のスレッドが並行して走る場合、そうはならないことがある．

プログラム実行前の m1 の値が 0 だったとすると，n 個のスレッドが並行してプログラムを実行した後に m1 がとり得る値をすべて示せ．

(2) 上記プログラムにおけるプログラム作成者の期待を達成するためには，ロックを用いることが一般的である．一方で，ロックを用いない方法もある．compare-and-swap 命令を用いると，次の通り書くことができる．

```
increment:
  load      R1, m1          // R1 = m1
  add       R2, R1, 1       // R2 = R1 + 1
  cas       m1, [(a)], [(b)] // compare-and-swap 命令
  jumpne    increment       // 等しくなければ先頭にジャンプ
```

(a) と (b) が何かを答えよ．

(3) compare-and-swap 命令を用いてロックを実装することもできる．以下のプログラムはその例である．プログラム実行前，m2 の値は 0 であるとする．

```
  move      [(a)], 0
  move      [(b)], 1
try:
  cas       m2, [(c)], [(d)]
  jumpe     acquired
  jump      try
acquired:
  ⋮  (クリティカルセクション)
  move      R1, 0
  store     m2, R1
```

(a), (b), (c), (d) が何かを答えよ．

(4) (3) のプログラムで，クリティカルセクションを同時に実行するスレッドを 1 つ以下にできる理由を，compare-and-swap 命令の機能に言及しつつ，簡潔に説明せよ．

表：アセンブリコードの命令

命令形式	意味
`load` レジスタ，メモリ	メモリ上の値をレジスタにロードする．
`store` メモリ，レジスタ	レジスタの値をメモリにストアする．
`move` レジスタ 1，レジスタ 2 または値 1	レジスタ 2 の値や値 1 をレジスタ 1 の値とする．
`add` レジスタ 1，レジスタ 2，値 1	レジスタ 2 の値に値 1 を足したものをレジスタ 1 の値とする．
`cas` メモリ，レジスタ 1，レジスタ 2	compare-and-swap 命令．メモリ上の値とレジスタ 2 の値を比較し，等しければメモリにレジスタ 1 の値をストアする．この比較とストアを atomic（不可分）に行う．等しくなければ何もしない．
`jump` ジャンプ先	ジャンプ先にジャンプする．
`jumpne` ジャンプ先	直前の `cas` 命令にて比較結果が等しくなかった場合に，ジャンプ先にジャンプする．等しかった場合にはジャンプしない．
`jumpe` ジャンプ先	直前の `cas` 命令にて比較結果が等しかった場合に，ジャンプ先にジャンプする．等しくなかった場合にはジャンプしない．

専門科目 (午前)　　24　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

2×4 行列 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義する．

(1) 次の条件 (a)，(b) を満たす 4×4 直交行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(a) $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は行列 $\boldsymbol{A}$ が定める写像の核 $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の正規直交基底をなす 4 次元列ベクトル．

(b) $\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ は行列 $\boldsymbol{A}^T$ の列ベクトルの張る線形部分空間 $\{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}$ は 2 次元列ベクトル$\}$ の正規直交基底をなす 4 次元列ベクトル．ここで，$\boldsymbol{A}^T$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を表す．

(2) 4×4 正方行列 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の 4 つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (重複する場合を含む) を求めよ．

(3) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ に対応し，互いに直交する $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ を求めよ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ.

(1) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

が発散することを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

について，収束値を求めよ．さらに絶対収束しないことを示せ.

問 3 (基礎問題)

計算過程で乱数を用いるアルゴリズムを乱択アルゴリズムという．乱数の出方によっては誤る可能性もあるが，乱数を用いることで通常のアルゴリズムより効率よく計算できる場合があるため，乱択アルゴリズムはアルゴリズムの重要な設計法の一つになっている．次に示すのは，行列積の検算を実際に積を計算することなく効率よく行う乱択アルゴリズム BasicCheck である．

入力：$n \times n$ の整数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.
出力：$\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積になっているか否かの判定.
注）$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ならば yes，$C \neq AB$ ならば no と出力して欲しいが，
　　つねに正しく判断できるとは限らない.
計算手順：
　各 $r_1, \ldots, r_n$ の値として
　　ランダムに 0 か 1 を選び，
　　ランダム縦ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ と定義する.
　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Br})$ を求める.
　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Cr}$ を求める.
　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ ならば yes，そうでないならば no を出力する.

このアルゴリズムについて以下の問いに答えよ．なお，アルゴリズム中でランダムに 0 か 1 を選んでいるところでは，毎回独立に確率 1/2 で 0 か 1 が選ばれるものとする．また，与えられた入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ とアルゴリズム中のベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \iff (\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

が成立するが，解答ではこの事実を利用してもよい．ただし，$\boldsymbol{0}$ はすべての要素が 0 の縦ベクトルである.

(1) この BasicCheck は，ランダムベクトル $\boldsymbol{r}$ の選び方が悪いと誤判定する（正しく検算できない）場合がある．その誤り方は，(i) yes と出力したときのみ誤る場合がある，(ii) no と出力したときのみ誤る場合がある，(iii) yes と出力したときも，no と出力したときも誤る場合がある，のどれであるか，その理由とともに答えよ.

(2) BasicCheck をサブルーチンとして利用して，1/1000 以下の誤判定確率をつねに保証するアルゴリズム Check を示し，その誤判定確率が 1/1000 以下であることを証明せよ．なお，ここでは，任意の入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し，BasicCheck が誤判定する確率は 1/2 以下である，という事実を仮定してもよい.

(3) 任意の入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し，BasicCheck が誤判定する確率が 1/2 以下であることを証明せよ.

問 4 (一般問題)

$\mathbb{F}_2$ を二つの元 $\{0,1\}$ からなる体とする．行列の各成分が $\mathbb{F}_2$ の元であり，行列式が $1 \in \mathbb{F}_2$ となる 2 次正方行列全体を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2)$ と表す．すなわち，

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{F}_2, ad-bc=1 \right\}.$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2)$ は行列の積に関して群となる．

(1) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2)$ の元の位数を列挙せよ．

(2) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2)$ と 3 次対称群は同型であることを示せ．

問 5 (一般問題)

X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) Y がハウスドルフ空間であったとする．Y の 1 点からなる集合は閉集合になることを示せ．ただし，位相空間 Z がハウスドルフ空間であるとは，Z の任意の相異なる２点 x, y に対して，Z の開集合 U, V が存在し， $x \in U$ かつ $y \in V$ でさらに $U \cap V$ が空集合となること，をいう．

(2) X はコンパクトとする．A を X の閉集合とすると，A は X のコンパクトな部分集合になることを示せ．ただし，位相空間 Z の部分集合 C がコンパクトであるとは，開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で $C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となるものを任意に与えると，自然数 n と $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ が成り立つこと，をいう．

(3) X はコンパクトで，Y はハウスドルフ空間とする．B を Y の有限部分集合とすると，$f^{-1}(B)$ は X のコンパクトな部分集合になることを示せ．

問 6 (一般問題)

$u \in C^2([0,\pi]\times\mathbb{R})$ が，与えられた関数 f に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

を満たしているとする. 以下の設問に答えよ.

(1) いかなる f についても

$$\int_0^\pi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$

が t によらないように定数 k を定めよ.

(2) $f \equiv 0$ ならば $u \equiv 0$ を示せ.

(3) $f(x) = \sin 2x + \sin 5x$ のとき $u(x,t)$ を求めよ.

問 7 (一般問題)

以下の数理計画問題の最適解および最適値を求めよ．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{目的} & : & \frac{1}{3}\,x_1 - x_2 - \frac{5}{12}\,x_3 + \max(y_1 - y_2, 3\,y_1 - 2\,y_2) \ \rightarrow \ \text{最小化} \\
\text{条件} & : & \begin{array}{rrrcr}
x_1 & +\,x_2 & +\,\frac{1}{3}\,x_3 & \leq & \frac{1}{5} \\
\frac{3}{2}\,y_1 & +\,y_2 & & \leq & 3 \\
\frac{1}{2}\,y_1 & +\,y_2 & & \geq & -1 \\
-2\,y_1 & +\,y_2 & & \leq & \frac{19}{4}
\end{array} \\
 & & x_1, x_2, x_3, y_2 \geq 0, \quad y_1 \leq 0
\end{array}
$$

ただし，$\max(a, b)$ は a と b の最大値を表す．

問 8 (一般問題)

$X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立に平均 μ^{-1} $(\mu > 0)$ の指数分布 (密度関数 $f_X(x) = \mu\, e^{-\mu x}$ $(x \geq 0)$) にしたがう確率変数の列とする．a を正の実数として以下の設問に答えよ．ただし P は確率，E は期待値を表す．

(1) $X_n > a$ となる最小の n を表す確率変数を N とする．すなわち，$\{N = n\} = \{X_1 \leq a, X_2 \leq a, \ldots, X_{n-1} \leq a, X_n > a\}$ である ($X_n > a$ となる n がない場合は $N = +\infty$ とする)．$N = n$ である確率 $\mathsf{P}(N = n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を a, μ, n を用いて表せ．

(2) $X_i > a$ が与えられたときの X_i の条件付き期待値 $\mathsf{E}(X_i \mid X_i > a)$，および $X_i \leq a$ が与えられたときの X_i の条件付き期待値 $\mathsf{E}(X_i \mid X_i \leq a)$ をそれぞれ a, μ を用いて表せ．

(3) (1) の N に対して $\mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big)$ を a, μ を用いて表せ．

問 9 (一般問題)

データ $D = \{(y_1, x_1), (y_2, x_2), \ldots, (y_n, x_n)\}$ は 2 次の関係

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \epsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を持つとする．ここで ϵ_i は観測誤差である．データ D から未知パラメータ a, b, c の推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ を誤差の自乗和を最小化すること (最小自乗法) で求めたい．ただし (一般性を失うことなく)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \quad S_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

を仮定する．次の量を定義する．

$$S_{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad S_{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4, \quad S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad S_{x^2y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i.$$

(1) 最小自乗推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ が満たす線形方程式を S_{x^3}, S_{x^4}, S_{xy}, S_{x^2y} を用いて表せ．

(2) 最小自乗推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ をそれぞれ S_{x^3}, S_{x^4}, S_{xy}, S_{x^2y} を用いて表せ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ 上の言語を考える．奇数長の文字列 $\alpha = x_1x_2\cdots x_{2n}x_{2n+1}$ （ただし $x_i \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$）に対して，

$$\mathrm{skip}(\alpha) = x_1x_3x_5\cdots x_{2n-1}x_{2n+1}$$

とする．つまり $\mathrm{skip}(\alpha)$ は α の奇数番目の文字だけを読んだ結果である．言語 L に対して

$$\mathrm{skip}(L) = \{\beta \mid \exists\alpha \in L\ \big(\alpha \text{ は奇数長で } \mathrm{skip}(\alpha) = \beta\big)\}$$

とする．

(1) 言語 $\{(\mathsf{aa})^n(\mathsf{bb})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が正規でないことを，ポンピング補題を用いて示せ．ただし $\mathbb{N}$ は 0 を含んだ自然数全体の集合 $\{0,1,2,\ldots\}$ である．

(2) L_1 は正規でないが $\mathrm{skip}(L_1)$ は正規になる言語 L_1 の具体例を示せ．

(3) 一般に言語 L が正規ならば $\mathrm{skip}(L)$ も正規であることを証明せよ．

(注意１：ポンピング補題) 言語 X が正規であるならば，X に対して以下の条件を満たす自然数 p（ポンピング長）が存在する．

$$\forall\sigma\Big[\Big(\sigma \in X \text{ かつ } |\sigma| \geq p\Big) \text{ ならば } \exists\alpha,\exists\beta,\exists\gamma\Big(\sigma = \alpha\beta\gamma,\ |\alpha\beta| \leq p,\ |\beta| > 0,\ \text{かつ } (\forall n \in \mathbb{N})(\alpha\beta^n\gamma \in X)\Big)\Big].$$

ただし σ,α などは文字列を表す変数で，$|\sigma|$ は文字列 σ の長さである．

(注意２) 有限オートマトンを式で表記する場合は，決定性／非決定性を明記した上で，状態集合 Q，遷移関数 T，初期状態 s，受理状態集合 A を並べて (Q,T,s,A) というように表記すること．ただし $s \in Q$, $A \subseteq Q$ であり，決定性の場合には T は $Q \times \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ から Q への関数，非決定性の場合には T は $Q \times \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ から $\mathcal{P}(Q)$ への関数である（$\mathcal{P}(Q)$ は Q のベキ集合）．

(注意３) 言語 X が正規であることを証明するには，X を受理する有限オートマトンまたは X を表す正規表現を示せばよい．たとえば前者の場合は，(Q,T,s,A) が明確に記述されていれば,「これが X を受理すること」の証明は不要である．

問 11 (一般問題)

フィボナッチ数とは次のようなものである．

$\mathrm{fib}(n) = 1$　　$n = 0$ または 1 のとき

$\mathrm{fib}(n) = \mathrm{fib}(n\text{-}1)+\mathrm{fib}(n\text{-}2)$　　$n \geq 2$ のとき

これをそのまま再帰呼出しを用いて計算するプログラムにすると次のようになる．n が負の場合は考えなくてよいとする．また言語は Java 風であるが，文法の細部は気にしなくてよい．

［プログラム］

```
int fib(int n) {
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

(1) $\mathrm{fib}(n)$ の呼び出し回数に基づく時間計算量は $\mathrm{O}(\mathrm{fib}(n))$ であることを示せ．

(2) ある計算機で上のプログラムを実行させたところ，

fib(30)=1346269

実行時間 0.25 秒（有効数字 2 桁，以下同じ）

fib(31)=2178309

実行時間 0.30 秒

fib(32)=3524578

実行時間 0.39 秒

fib(33)=5702887

実行時間 0.52 秒

であった．

これらの実行時間は $\mathrm{fib}(n)$ の定数倍ではない．その理由を推測して述べよ．

また，この推測をもとに $\mathrm{fib}(n)$ の計算にかかる時間を有効数字 2 桁で予想して，簡単な式で記せ．

さらに，fib(34) の計算にかかる時間を予想せよ．

問 12 (一般問題)

プログラミング言語における手続き p について，次の条件を満たすことを $\mathtt{T} \rightsquigarrow \mathtt{U}$ のように表すことにする．ここで T と U は集合である．

- p を任意の引数 $\mathtt{i} \in \mathtt{T}$ とともに呼ぶと，そのときの p の計算は正常に停止して U の要素が戻り値になるか，p の計算は停止しない．
- p を引数 $\mathtt{i} \notin \mathtt{T}$ とともに呼んだときの動作は何も保証されない．

(1) 次のような手続き proc1 を考える．

```
proc1(i) { return f(i); }
```

proc1 は引数 i とともに手続き f を呼び，f の戻り値を自身の戻り値として返す．ここで f が次の (a), (b), (c) であるとき，手続き proc1 を任意の引数 $\mathtt{i} \in \mathtt{I}$ とともに呼ぶと，proc1 の計算が停止する場合の戻り値は常に I の要素であるといえるか否か，それぞれの場合について答えよ．理由は示さなくてよい．

(a) $\mathtt{I} \rightsquigarrow \mathtt{I}$

(b) $\mathtt{L} \rightsquigarrow \mathtt{I}$ ただし $\mathtt{I} \subset \mathtt{L}$

(c) $\mathtt{B} \rightsquigarrow \mathtt{I}$ ただし $\mathtt{B} \subset \mathtt{I}$

(2) 引数の集合 S と T の間の次のような関係を $\mathtt{S} \prec \mathtt{T}$ のように表すことにする．なお U も集合である．

- 任意の $\mathtt{T} \rightsquigarrow \mathtt{U}$ である手続き p について，任意の引数 $\mathtt{i} \in \mathtt{S}$ とともに p を呼ぶと，p の計算は正常に停止して U の要素が戻り値になるか，p の計算は停止しない．

例えば $\mathtt{S} \subset \mathtt{T}$ ならば，明らかに $\mathtt{S} \prec \mathtt{T}$ である．

さらに，要素に代入できる値が $v \in \mathtt{T}$ である配列の集合を T[] と表す．配列 $\mathtt{a} \in$ T[] の要素に $v \notin \mathtt{T}$ を代入すると，エラーとなり，プログラム全体はそこで異常停止する．

(i) $\mathtt{S} \prec \mathtt{T}$ ならば $\mathtt{T[]} \prec \mathtt{S[]}$ である，は成り立たない．反例を示せ．

(ii) $\mathtt{S} \prec \mathtt{T}$ ならば $\mathtt{S[]} \prec \mathtt{T[]}$ である，は成り立たない．反例を示せ．

専門科目 (午前)　　23　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

問 1 (基礎問題)

$\boldsymbol{A}$ を 4×4 行列， $\boldsymbol{b}$ を 4 次元列ベクトル, $\boldsymbol{I}$ を 4×4 単位行列とする．これらを左から順に並べた 4×9 行列 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{I})$ の左側から 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を乗じたとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得た．以下の設問に答えよ．

(1) 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を記せ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算せよ．

(3) 線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を計算せよ．

(4) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算せよ．

問 2 (基礎問題)

$\alpha \in (-\infty, \infty)$ に対し

$$f(x) = e^{\alpha x}\,(1 + \sin x)$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) $x = 0$ を中心に $f(x)$ を Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

する．$a_1 = 0$ となるように α を定めよ．またこのとき a_2 を求めよ．

(2) (1) の α に対し

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

を求めよ．

問 3 (基礎問題)

自己ループ（自分に戻る辺）のない有向グラフを考える．頂点 x に対して，整数

$$(x \text{ に入ってくる辺の本数}) - (x \text{ から出ていく辺の本数})$$

のことを x の**収支**と呼ぶ．たとえば図１のグラフでは㋐の収支は -1，㋖の収支は $+1$ で，他の頂点の収支はすべて 0 である．

有向グラフ G が**連結グラフ**であるとは，辺の向きを無視して無向グラフとして見たときに G が連結グラフである（すなわち任意の２頂点間に無向パスが存在する）ことで定義される．

グラフ G から辺 α を取り除いて（頂点は取り除かずに）できるグラフを $G-\alpha$ と書く．G が連結グラフで $G-\alpha$ が連結グラフでない場合に，α のことを**ブリッジ**と呼ぶ．たとえば図１のグラフでは辺㋐→㋓と辺㋔→㋖がブリッジである．

すべての辺をその向きに従ってちょうど１回ずつ通る経路（つまり「一筆書き」）のことを**オイラー路**と呼ぶ．たとえば図１では

㋐→㋑→㋒→㋐→㋓→㋔→㋕→㋖→㋗→㋓→㋖→㋔→㋖

はオイラー路である．

(1) 連結グラフ G が次の条件を満たしているとする．

> **(∗)** G 内に収支が -1 の頂点がひとつ（この頂点を a とする）と収支が $+1$ の頂点がひとつ（この頂点を b とする）あり，a, b 以外の頂点はすべて収支が 0 である．

このとき，もしも a から出る辺の１本がブリッジであるならば，そのブリッジでつながる二つの部分グラフのうちの a が属さない方に必ず b が属すること（図２）を示せ．

(2) 任意の連結グラフ G に関して次の (i)(ii) が成り立つことを，G の辺の本数に関する帰納法で (i)(ii) 同時に証明せよ．

(i) G のどんな頂点の収支も 0 であるならば，任意の頂点 a に対して，a から出発して a で終わるオイラー路が存在する．

(ii) G が上記の条件 (∗) を満たすならば，a を出発点，b を終点とするオイラー路が存在する．

(次ページに注意あり)

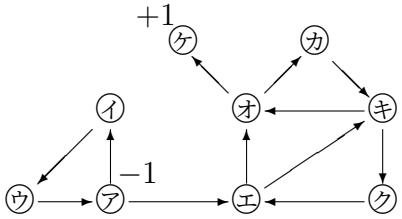


図１

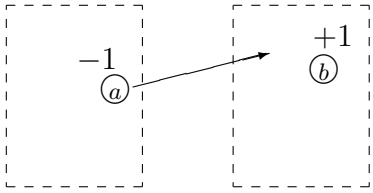


図２

注意：次の事実や記法を解答中で使用してもよい．

(事実 1) 各頂点の収支がどれも 0 であるグラフにはブリッジが存在しない．

(事実 2) どんなグラフもそのすべての頂点の収支を合計すると 0 になる．

(事実 3) 連結グラフからブリッジをひとつ取り除くとちょうど二つの連結グラフに分かれる．

(記法 1) グラフ G の頂点集合を $\mathrm{V}(G)$，辺集合を $\mathrm{E}(G)$ と表記してもよい．

(記法 2) 問題 (1) の状況のときには，ブリッジでつながる二つの部分グラフのうち a が属する方を A，そして b が属する方を B と，それぞれ呼んでよい．

問 4 (一般問題)

H を実ヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$，$\| \cdot \|$ はそれぞれ H の内積，ノルムを表すとする．H の点列 $\{a_n\}$ が $a \in H$ に弱収束するとは，任意の $h \in H$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \langle a_n, h \rangle = \langle a, h \rangle$$

となるときをいう．以下の設問に答えよ．

(1) $a_n \in H$ が $a \in H$ に収束するならば，$\|a_n\|$ は $\|a\|$ に収束することを示せ．

(2) $a_n \in H$ が $a \in H$ に収束するならば，a_n は a に弱収束することを示せ．

(3) $a_n \in H$ が $a \in H$ に弱収束し，かつ $\|a_n\|$ が $\|a\|$ に収束するならば，a_n は a に収束することを示せ．

(4) (2) の逆が成立しない例をあげよ．

問 5 (一般問題)

$\mathbb{F}$ を体 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする.

(1) 多項式 X^2+X+1 は $\mathbb{F}[X]$ で既約であることを示せ.

(2) $\mathbb{F}[X]/(X^2+X+1)$ は体である．元 $[2X^3+4X^2+4] \in \mathbb{F}[X]/(X^2+X+1)$ について，乗法に関する逆元と位数を求めよ.

問 6 (一般問題)

以下の設問に答えよ.

(1) C^2 級関数 $u(x,y)$ に対し，$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$ がすべての (x,y) で成立するとき，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$

を示せ．ここで，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ で，$f(r)$ は r のみの関数とし，$f'(r)=\dfrac{df}{dr}(r)$，$f''(r)=\dfrac{d^2f}{dr^2}(r)$ である.

(2)

$$\begin{cases} -g''(r)-\dfrac{1}{r}g'(r)=1 & (0<r<1) \\ g(1)=0 & \end{cases}$$

をみたす有界な C^2 級関数 $g(r)$ を求めよ.

問 7 (一般問題)

次の線形計画問題を (P) と呼ぶ.

$$
\begin{array}{lrrcr}
\text{maximize:} & 3x_1 & -5x_2 & & \\
\text{subject to:} & -x_1 & +3x_2 & \leq & \frac{3}{2} \\
 & 2x_1 & -3x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq & -1 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

以下の設問に答えよ.

(1) この問題の双対問題 (D) を示せ.

(2) 線形計画問題 (D) に対してシンプレックス法を適用し，最適値および最適解を求めよ.

(3) 上記 (2) で求まった双対問題 (D) の最適解と問題 (P) との間に成り立つ相補性定理の条件を用いて問題 (P) の最適解を求めよ.

(4) 次の連立不等式を同時に満す z_1, z_2 が存在しないことを示せ.

$$
\begin{cases}
-z_1 & +3z_2 & \leq & 0 \\
2z_1 & -3z_2 & \leq & 0 \\
-z_1 & +z_2 & \leq & 0 \\
3z_1 & -5z_2 & > & 0
\end{cases}
$$

問 8 (一般問題)

X, Y を密度関数 $f(x)$ を持つ連続分布に従う互いに独立な二つの確率変数とし，$Z = X - Y$ とする．Z の 3 次モーメントは存在すると仮定する．

(1) Z の密度関数は $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+t)f(t)dt$ であること，そして g は原点に関して対称なことを示せ．

(2) 共分散 $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$ はゼロになることを示せ．

(3) Z と Z^2 は独立でないことを示せ．

問 9 (一般問題)

n 組の確率変数 (A_t, B_t), $t = 1, \ldots, n$, は独立に同一分布に従い，各 A_t, B_t は $\{0, 1\}$ の値を取る．ただし A_t と B_t が独立とは限らない．$A_t = B_t$ となる回数を表す確率変数を M, その観測値を m とする $(0 \leq m \leq n)$．$P(A_t = 1) = P(B_t = 1) = 1/2$ を仮定して以下の設問に答えよ．

(1) $P(A_t = a, B_t = b) = p_{ab}$ と書き，とくに $p_{11} = \theta$, $0 < \theta < 1/2$ とおく．θ を用いて p_{00}, p_{01}, p_{10} を表せ．

(2) 未知パラメータ θ を最尤法によって観測値 m から推定したい．尤度関数 $L(\theta)$ および最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) 帰無仮説 $\theta = 1/4$，対立仮説 $\theta \neq 1/4$ の仮説検定を有意水準 0.05 で行いたい．ある定数 $c > 0$ を用いて，$|m - n/2| > c$ ならば帰無仮説を棄却する．下記の事実を利用して $n = 10000$ のときの c の近似値を求めよ．

平均 0, 分散 1 の正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ で表すと $\Phi(1.96) \approx 0.975$ である．また成功確率 $0 < p < 1$ の二項分布に従う確率変数 $Z \sim B(p, n)$ に関して，n が十分大きいとき

$$P\left(\frac{Z - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

が任意の実数 x に対して成立する．

問 10 (一般問題)

次のような文脈自由文法によって expr から生成されるプログラミング言語 L を考える．0, 1, -, % は終端記号である．

```
digit : 0 | 1
term  : digit | term digit
expr  : term | expr - term | expr % term
```

(1) 言語 L のプログラム

```
1-1%1
```

の構文解析木を示せ．

(2) 言語 L を表す正規表現を示せ．

(3) 演算子 % が - より高い優先度をもつように言語 L の文法を修正せよ．

(4) 言語 L の最後の規則を

```
expr : term | expr - term | expr % term | ( expr )
```

のように変更する．なお (と) も終端記号である．変更後の言語 L を表す正規表現は存在しないが，その理由をポンピング補題を用いて述べよ．

【正規表現について】 特別な記号として $^+$ (1 回以上の繰り返し), * (0 回以上の繰り返し), | (または) を使ってよい．また括弧はパターンの範囲を明確にするのに使われる．例えば $\mathtt{a}^+$ は a，aa，aaa，... と，$\mathtt{ab}^*$ は a，ab，abb，... と一致する．$(\mathtt{a|b})^+$ は a または b の 1 回以上の繰り返し，例えば a，ab，bba などである．$(\mathtt{abc})^+$ は abc の 1 回以上の繰り返し，abc，abcabc，abcabcabc，... と一致する．

【ポンピング補題について】 言語 L が正規であるならば，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する．

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は ε (空列) である．

問 11 (一般問題)

以下は，○×ゲーム（三目並べ，tic-tac-toe ともいう）の指し手を調査するためのC言語プログラムである．このプログラムについて以下の設問に答えよ．

```
/* ヘッダーファイルは省略 */
int B[9];
int check(){ /* 定義は省略 */ }
int count(int t);
int next(int t);

int main(int argc, char *argv[]) {
   int i, answer;

   for(i = 0; i < 9; i++) B[i] = 0;
   answer = count(1);
   printf("引き分け指し手総数 = %d\n", answer);

   for(i = 0; i < 9; i++) B[i] = 0;
   answer = next(1);
   if(answer == +1) printf("○必勝\n");
   else if(answer == -1) printf("×必勝\n");
   else printf("その他\n");

   return 0;
}

int count(int t) {
   int d, i, result;

   if(t > 9) {
     if(check() == 0) return 1;  /* （※1）*/
     else return 0;
   }

   if(t % 2 == 1) d = +1; else d = -1;
   result = 0;
   for(i = 0; i < 9; i++) {
      if(B[i] == 0) {
         B[i] = d * t;
         result = result + count(t + 1);
      }
   }
   return result;
}
```

（次ページに続く）

```
int next(int t) {
    /* （※２） */
}
```

補足説明

0	1	2
3	4	5
6	7	8

・ 配列 B は，○から始めて○と×の手を交互に打っていく○×ゲームの各時点で盤面を，手の打たれた順も含めて保持するために用いられる．各マスの状態は右図に示した番号の添え字の所に記憶される．

・ すべて○か×で埋まっている盤面を「最終盤面」と呼ぶ．check は，配列 B が最終盤面を表しているときに，手の打たれた順も考慮して，○×のどちらが勝っているか，もしくは引き分けかを判定する関数である．その盤面で○が勝っていたときには $+1$ を，×が勝っていたときには -1 を，そして引き分けの場合には 0 を値として返す．

・ プログラム中の t % 2 は，t の値を 2 で割った余りを求める演算である．

(1) 最終盤面までの手の指し方の総数は $9! = 362880$ 通りあるが，その中で引き分けになる指し方の総数を求めたい．その計算のための関数が count である．この関数は B が初期盤面を表しているとき count(1) を実行すると，総引き分け数をその値として返すよう設計したつもりだった．しかし，現在の count のプログラムには欠陥があり，実際に上記のプログラムを実行すると，引き分け指し手総数として 0 が出力されてしまう．そこでチェックのために上記プログラムの（※１）の if 文の前に printf("test\n"); を挿入したところ，この文が計算全体の中で一度しか実行されないことがわかった．どのように修復すればよいのか，正しいプログラムを示し（修正する部分だけでよい），その理由を説明せよ（関数 check のプログラムには間違いがないと仮定してよい）．

(2) ○×ゲームが先手の○必勝か後手の×必勝か，あるいはそのどちらでもないかを調べたい．再帰計算に基づき勝敗を正しく判定できるよう関数 next のプログラムの（※２）の部分を埋めよ．なお，変数は適宜追加してよい．関数 check を利用してもよい．また，完成したプログラムにおいて，任意の t に対し（ただし $1 \leq t \leq 9$），配列 B が $t-1$ 手目までの盤面（と指し手順）を表しているとき，next(t) が計算する値が何かを簡潔に述べよ．

問 12 (一般問題)

複数のスレッドがメモリ空間を共有して並行動作する状況を考える．スレッド間の同期や排他制御のために，ロックを獲得する `acquire` 命令，解放する `release` 命令を使えるとする．

n 個の変数 x_i $(0 \leq i < n)$，n 個のロック L_i $(0 \leq i < n)$ があるとして，変数 x_i から変数 x_j $(i \neq j)$ へ値を a だけ移す以下のプログラム $P_1 \sim P_4$ を考える．これは例えば，銀行口座 x_i から x_j へ a 円を振り込むといった処理を想定している．ここで，$x_i = x_i - a$ や $x_j = x_j + a$ を不可分 (atomic) に実行することはできないとする．

```
P1(i,j) {
  x_i = x_i - a
  x_j = x_j + a
}

P2(i,j) {
  acquire L_0
  x_i = x_i - a
  x_j = x_j + a
  release L_0
}

P3(i,j) {
  acquire L_i
  acquire L_j
  x_i = x_i - a
  x_j = x_j + a
  release L_j
  release L_i
}

P4(i,j) {
  if (i < j) {
    acquire L_i
    acquire L_j
    x_i = x_i - a
    x_j = x_j + a
    release L_j
    release L_i
  } else {
    acquire L_j
    acquire L_i
    x_i = x_i - a
    x_j = x_j + a
    release L_i
    release L_j
  }
}
```

(1) プログラム $P_1(0,1)$ をひとつのスレッドが 1 回実行すると x_0 の値は a 減り，x_1 の値は a 増える．$P_1(0,1)$ をふたつのスレッドが 1 回ずつ実行したときの実行前後の x_0 と x_1 の値の変化をすべて述べよ．

(2) 競争状態（または競合状態，race condition）を避けることを目的として，プログラム P_1 に対してロックの獲得，解放処理を加えたものがプログラム $P_2 \sim P_4$ である．

プログラム P_2 では，すべてのスレッドが同一のロック L_0 を獲得，解放する．このようなプログラムをマルチプロセッサ上で実行した場合，スレッドの数を増やしても並列度が上がらない可能性がある．それはなぜか，説明せよ．

(3) 複数のスレッドがプログラム P_3 を実行する．i，j は，スレッドごと，プログラムの実行ごとに様々な値をとるとする．

デッドロックが発生し得るか否か，答えよ．デッドロックが発生し得る場合，デッドロックに至るまでの過程を，各スレッドによるロック獲得の手順に着目して述べよ．過程は，i，j の特定の組み合わせについて述べればよい．

(4) プログラム P_4 について，(3) と同様のことを答えよ．

専門科目 (午前)　22　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 解答用紙ごとに必ず 問題番号および受験番号 を記入せよ.
5. 要求された問題数を超えて解答した場合は 採点されない 可能性がある.

問 1 (基礎問題)

n を 2 以上の整数とし，以下に現れるすべての行列の成分は実数値をとるものとする．$n \times n$ 対称行列 S は，零ベクトルでない任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top S\,\boldsymbol{x} > 0$ を満たすとき，正定値であるという．ここで $^\top$ は転置を表す．また，任意の正定値対称行列 S に対して，$H^2 = S$ を満たす正定値対称行列 H が一意に存在することが知られている．A を任意の $n \times n$ 正則行列として以下の問に答えよ．

(1) $S = A^\top A$ が対称行列であり，かつ正定値であることを示せ．

(2) (1) の S に対して，行列 H を $H^2 = S$ を満たす正定値対称行列とする．行列 U を H の逆行列 H^{-1} を用いて $U = A\,H^{-1}$ とするとき，U が直交行列であることを示せ．[ヒント: 正則な対称行列の逆行列は対称である．]

(3) ある正定値対称行列 K と直交行列 V が $A = V\,K$ を満たすとすると，K と V はそれぞれ (2) の H と U に他ならないことを示せ．

問 2 (基礎問題)

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$$

問 3 (基礎問題)

A を空でない集合，$\prec$ を A 上の 2 項関係とする．x, y, z などは A の要素を表す変数とし，$x \prec y$ でないことを $x \not\prec y$ と表記する．以下では $\prec$ の性質を論理式で表現する．たとえば $\prec$ が推移的であることは

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \Big(((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \Rightarrow (x \prec z)\Big) \qquad (*)$$

と表せる．ただし「$\forall, \wedge, \Rightarrow$」はそれぞれ「すべての，かつ，ならば」を表す論理記号である．

(1) $\prec$ が推移的でないことを否定の論理記号を使わない論理式で表せ．つまり $(*)$ に現れている「変数，括弧，$\prec$，$\forall$，$\wedge$，$\Rightarrow$」といった記号の他に「$\not\prec$，$\exists$（ある），$\vee$（または）」を使用してもよいが，否定を表す論理記号（たとえば「$\neg$」）は使用せずに，$(*)$ の否定を意味する論理式を書け．

(2) 次の条件が満たされることを「$\prec$ は継続的である」という．

$$\forall x\ \exists y\ (x \prec y)$$

A の要素数が 2 で，推移的でなく，かつ継続的であるような $\prec$ の具体例をひとつ挙げよ．

(3) 次の条件が満たされることを「$\prec$ は非反射的である」という．

$$\forall x\ (x \not\prec x)$$

$\prec$ が推移的かつ継続的かつ非反射的であるならば，必ず A は無限集合であることを証明せよ．

問 4 (一般問題)

C^1 級の関数 $u(t,x)$, $(t \geq 0,\ x \in \mathbb{R})$ が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(t+x) \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

を満たすとする.

(1) $\xi = t + x$, $\eta = t - x$ とおき，上記の微分方程式を ξ, η に関する微分方程式として表せ.

(2) $u(t,x)$ を求めよ.

問 5 (一般問題)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の集合とする．$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の関係 $\sim$ を，$(a, b), (a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対し

$$(a, b) \sim (a', b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b$$

と定義する．このとき次を示せ．

(1) $\sim$ は同値関係である．

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の演算

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

は，$\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$ 上の群演算を導く．

(3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$ は加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ に同型である．ただし $\mathbb{Z}$ は整数の集合である．

問 6 (一般問題)

H を実ヒルベルト空間，T を恒等的に 0 ではない H 上の有界線形汎関数とする．ここで H 上の有界線形汎関数とは，H から $\mathbb{R}$ への線形写像 T で，ある正の実数 k が存在して

$$|T(x)| \leq k\|x\| \ \ ({}^{\forall}x \in H)$$

を満たすものを意味する．なお，$\|\cdot\|$ は H のノルム，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は H の内積を表す.

(1) 集合 $N = \{x \in H;\ T(x) = 0\}$ は H の閉部分空間となることを示せ.

(2) 集合 $N^{\perp} = \{y \in H;\ \langle y, x \rangle = 0\ ({}^{\forall}x \in N)\}$ は H の閉部分空間となることを示せ.

(3) $N^{\perp}$ の次元が 1 であることを示せ．ただし，$N^{\perp}$ はゼロベクトルのみの集合ではないことは, 証明なしで用いてよい.

問 7 (一般問題)

ある定数 c を含んだ以下の線形計画問題をシンプレックス法で解きたい.

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{maximize} & cx_1 & +4x_2 & -6x_3 & & \\ \text{subject to} & -4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \leq & 4 \\ & -x_1 & +x_2 & -2x_3 & \leq & 3 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \end{array}$$

（x_3 には非負条件 “$x_3 \geq 0$” がついていないことに注意せよ）.

以下の問に答えよ.

(1) この線形計画問題を基準形または標準形の線形計画問題に変換せよ.

(2) $c \leq -10$ と仮定して，この問題をシンプレックス法で解き，最適値と最適解を求めよ.

(3) この問題が有界な最適値をもつ c の範囲を，シンプレックス法を利用して求めよ.

問 8 (一般問題)

確率変数 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ の同時確率密度関数が次のように与えられている.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(1+2x+2y), & 0 \leq x, y \leq 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

このとき次の確率や期待値，分散などを計算せよ.

(1) $\boldsymbol{X}$ の周辺確率密度関数 $f_X(x)$

(2) $\boldsymbol{X}$ の期待値 $\mathrm{E}(\boldsymbol{X})$ と分散 $\mathrm{V}(\boldsymbol{X})$

(3) $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の共分散 $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ および 相関係数 $\rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

(4) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ の分散 $\mathrm{V}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})$

(5) 確率 $\mathrm{P}\{\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \leq 1\}$

問 9 (一般問題)

流行中のある感染症の保菌者の割合を推定するため，感染の有無を検査したところ，無作為に選んだ N 人中 M 人が陽性 (保菌者と推測される) であった．ただしこの検査は誤診の可能性があり，次の条件付き確率で与えられる 2 種類の誤診率を考慮する必要がある：

$$q = \mathbf{P}\{A^c \mid B\}, \quad r = \mathbf{P}\{A \mid B^c\}.$$

ここで

$$A = \text{被検者が陽性である事象},$$
$$B = \text{被検者が保菌者である事象}$$

であり，A^c, B^c はそれぞれの余事象である．過去の経験から q, r は既知であり，また十分小さく $r < M/N < 1 - q$ が成り立つとして良い．$p = \mathbf{P}\{B\}$ と置く．

(1)　事象 $A \cap B$ (陽性で保菌者)，$A \cap B^c$ (陽性で非保菌者)，$A^c \cap B$ (陰性で保菌者)，$A^c \cap B^c$ (陰性で非保菌者)，の確率をそれぞれ p, q, r で表せ．

(2)　陽性である理論確率と標本確率を等しいと置いた式 $\mathbf{P}\{A\} = M/N$ を p について解いて得られる (モーメント) 推定量 $\widehat{p}$ を求めよ．

(3)　このデータに対する p の最尤推定量 $\widehat{p}_{\mathrm{MLE}}$ を求めよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

上の言語を考える．ここで， アルファベット Σ 上の文字列 w を

$$w = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

としたとき，w の一番上の行とは文字列 $a_1a_2\cdots a_n$ を，w の真ん中の行とは文字列 $b_1b_2\cdots b_n$ を，w の一番下の行とは文字列 $c_1c_2\cdots c_n$ をそれぞれ指すこととする．

(1) 言語

$$A = \{w | w \text{ の一番上の行は一番下の行の逆文字列}\}$$

とする．ただし A は空列を含む．たとえば $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in A$ である．なぜならば “01100” は “00110” の逆文字列だからである．ポンピング補題を用いて A が正規でないことを示せ．

(2) 言語 A を生成する文脈自由文法 (注 1) を与えよ．

(3) アルファベット Σ 上の文字列 w の各行を 2 進数とみなす．言語

$$B = \{w | w \text{ の一番上の行と真ん中の行の和が一番下の行}\}$$

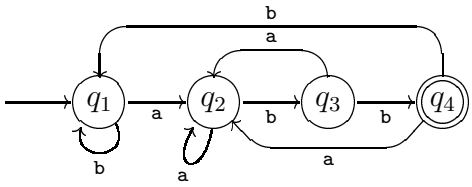
とする．ただし B は空列を含む．また各行の先頭には 0 が並んでもよい．たとえば $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in B$ であるが，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B$ である．B を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 2) を与えよ．

注 1: 以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ であるような言語 $\{w | w$ は a で始まり b を含み c で終わる $\}$ を生成する文脈自由文法の例である．

$$S \longrightarrow \mathtt{a}A$$
$$A \longrightarrow \mathtt{a}A | \mathtt{b}B | \mathtt{c}A$$
$$B \longrightarrow \mathtt{a}B | \mathtt{b}B | \mathtt{c}B | \mathtt{c}C$$
$$C \longrightarrow \epsilon$$

注 2: 以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w | w$ は abb で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理

状態の集合は $\{q_4\}$ である.



問 11 (一般問題)

セルへの参照を値とするプログラミング言語 M において，プログラムは変数宣言文の列とそれに続く代入文の列から構成される．ただし，プログラムで使用される変数は必ず 1 回だけ宣言することとする．

変数宣言	`x = cell();`	新しいセルを生成し，それへの参照を変数 x の初期値とする．セルも他のセルへの参照を値にとるが変数宣言時に作られた新しいセルはなにも参照しない．
変数への代入	`x := y;`	変数 x に変数 y の値を代入する．
セルへの代入	`*x := y;`	変数 x が参照するセルに変数 y の値を代入する．たとえば x と y がそれぞれセル $c_{\mathtt{x}}$ と $c_{\mathtt{y}}$ を参照し，$c_{\mathtt{x}}$ がセル c を参照していたときに，`*x := y` を実行すると，$c_{\mathtt{x}}$ は c の代わりに $c_{\mathtt{y}}$ を参照するようになる．

M はプログラムのなかの文を順次実行するものとする．以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 以下のプログラムを実行し終えた時点でいずれの変数からも直接的に，あるいは間接的に参照できないセルを過不足なく列挙し，それらが参照できない理由を説明せよ．

```
a = cell(); b = cell(); c = cell(); d = cell();
*a := d; a := b; *b := c; *c := a; *a := d;
```

解答にあたってはセルを識別するために，そのセルを初期値とした変数名を c の添字につけて表せ．たとえば，上述のプログラムにおいて変数 a の初期値となったセルは $c_{\mathtt{a}}$ と名づけられる．

(2) M の処理系でメモリ管理をするために，各セルに非負整数値をラベルづけ，命令を実行するときに以下の処理を行うこととする．

変数宣言 (`x = cell();`)

- 1 をラベルとする新しいセルを生成し，それへの参照を x の初期値とする．

変数への代入 (`x := y;`)

- y が参照するセルのラベルを 1 だけ増加する．
- x が参照するセルのラベルを 1 だけ減ずる．
- x に y の値を代入する．

セルへの代入 (`*x := y;`)

- y が参照するセルのラベルを 1 だけ増加する．
- x が参照するセル $c_{\mathtt{x}}$ がセル c を参照していたなら，c のラベルを 1 だけ減ずる．$c_{\mathtt{x}}$ がセルを参照していない場合にはなにもしない．
- x が参照するセルに y の値を代入する．

ラベルが 0 になったとき セル c のラベルが 0 になり，さらに c が他のセル c' を参照していたなら，c' のラベルを 1 だけ減ずる．

このメモリ管理処理を用いて (1) のプログラムを実行し終えた状態で，変数とセルをノードとし，セルの参照関係を有向辺とする有向グラフ（**セルグラフ**）を描け．変数を表すノードには変数名を，セルを表すノードにはラベルの値を記入せよ．

(3) (2) のメモリ管理方式を採用した上で，M の任意のプログラムを実行することを考える．プログラムが停止した時点で「正のラベルを持つセルの集合」と「セルグラフにおいて，変数ノードからのパスが存在するセルノードの集合」は一致するか．一致すると考える場合は説明を与えよ．そうでない場合は反例となるプログラムを挙げ，両者が一致しない理由を説明せよ．

問 12 (一般問題)

仮想アドレス空間を実現するためにページング機構を備えたプロセッサが一般的である．これについて以下の問いに答えよ．解答にあたって，全てのページはメモリ上にあるものとせよ．また 1KB は 1024 bytes，1MB は 1024KB とする．

(1) ページング機構を使うと，external fragmentation を避けることができる．この external fragmentation とは何か答えよ．

(2) 今，ページサイズとして 4KB と 4MB のどちらかを選べたとする．どちらのページサイズの方が TLB (Translation Look-aside Buffer) のミス率が小さくなると予想できるか答えよ．また，それを選んだ場合の欠点も述べよ．

なお TLB の大きさと利用するメモリ量は一定で変わらないとする．ただし利用するメモリ量は 4MB 以上で，メモリ・アクセスはまんべんなく発生するとする．

(3) 32 bit のアドレス空間のための 2 段階ページング (2-level paging) 機構を考える．論理アドレスを上位から 10bits，10bits，12bits に分割し，それぞれ 1 段目，2 段目のページテーブルのインデックス，ページ内のオフセットとして用いる．ページテーブルの各項目 (entry) は 4 bytes であるとする．またメモリのアドレスは 1 byte (= 8bit) 単位であるとする．

(3-a) この場合，ページサイズは何 KB であるか．

(3-b) プログラムが利用するメモリ量が合計 200MB であるとき，2 段目のページテーブルに必要なメモリ量の最大値と最小値を答えよ．また，そうなる状況を具体的に説明せよ．

ただし，プログラムはアドレスが連続しないメモリ領域を利用することもあるとする．メモリの割り当てが不要な論理ページについては，ページテーブルの項目が空であるとする．ページテーブルの全ての項目が空なら，そのページテーブル全体は不要になる．逆に，空でない項目が 1 つでもあれば，そのページテーブル全体が必要になる．

専門科目 (午前)　　21　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 解答用紙ごとに必ず 問題番号および受験番号 を記入せよ.
5. 要求された問題数を超えて解答した場合は 採点されない 可能性がある.

問 1 (基礎問題)

n 次実対称行列 S の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ とする．ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ で，固有ベクトルは全て $\|\mathbf{a}_i\| = 1$ と正規化されているとする．なお，この問題ではベクトルは全て n 次元実列ベクトルで，$\mathbf{x}^T$ はベクトル $\mathbf{x}$ の転置，$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ はベクトル $\mathbf{x}$ のノルムである．

(1) 固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ は互いに直交することを証明せよ．

(2) $\|\mathbf{x}\| = 1$ である全ての $\mathbf{x}$ に対する $\|S\mathbf{x}\|$ の最大値は λ_1 であることを証明せよ．

(3) $2 \leq i \leq n$ とする．$\|\mathbf{x}\| = 1$ かつ $\forall j < i$ で $\mathbf{x}^T\mathbf{a}_j = 0$ である全ての $\mathbf{x}$ に対する $\|S\mathbf{x}\|$ の最大値は λ_i であることを証明せよ．

問 2 (基礎問題)

次の広義積分が収束する実数 p, q の条件を求めよ.

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^p (\log x)^q} dx$$

ただし，a を任意の正の数とするとき，$\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ が収束することと $p > 1$ が同値であることは証明無しで使ってよい.

問 3 (基礎問題)

言語 L のプログラムは変数に対する代入文の集合である．代入文の右辺には整数定数値，変数，二つの変数の和のいずれかが記述できる．プログラム中に現れる変数それぞれについて 1 つずつの代入文があることとする．すなわち，代入されていない変数はなく，同じ変数に対しての複数の代入文もない．

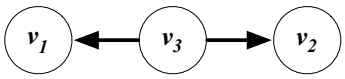
例 $v_1 = 1;\quad v_2 = v_1 + v_3;\quad v_3 = v_1 + v_4;\quad v_4 = 4;\quad v_5 = v_5 + v_6;\quad v_6 = v_5$

L における簡約計算は，プログラムから簡約可能な代入文を発見し，その右辺を計算結果の整数で置換することで進行する．ただし，簡約可能な代入文とは右辺に出現するすべての変数の値がすでに整数値に定まっているものである．たとえば，前述の例において $v_1 = 1$，$v_4 = 4$ と定まっているので，それらを参照する $v_3 = v_1 + v_4$ を $v_3 = 5$ に簡約できる．ここでの簡約によって v_3 の値が定まったために，$v_2 = v_1 + v_3$ も簡約可能になる．これを簡約して $v_2 = 6$ に置換できる．簡約計算の進行中に複数の文が簡約可能となることもあるが，簡約の順序は定まっていない．
L における簡約計算は，簡約可能な文がなくなった時点で停止し，その時点での変数に代入されている値を出力する．簡約計算の結果，値が定まらない変数については ? を出力する．前述の例の場合，以下の出力が得られる．

$$v_1 = 1,\quad v_2 = 6,\quad v_3 = 5,\quad v_4 = 4,\quad v_5 = ?,\quad v_6 = ?$$

以下の問に答えよ．

(1) L のプログラムにおける変数間の参照関係を有向グラフで表現する．たとえばプログラム $v_1 = 1;\quad v_2 = 2;\quad v_3 = v_1 + v_2$ における参照関係のグラフは以下のようになる．



例に挙げたプログラムにおける変数間の参照関係を有向グラフとして図示せよ．

(2) X を L の任意のプログラムとする．X の簡約計算が ? を出力しないための必要十分条件を述べよ．証明は不要である．

(3) L のプログラムは連立方程式とみなすことができる．このとき以下の条件 (a), (b), (c) を $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に適切に当てはめると任意のプログラム X に対して

$$\boxed{\text{ア}} \Longrightarrow \boxed{\text{イ}} \Longrightarrow \boxed{\text{ウ}}$$

が成立する．

(a) X の簡約計算が ? を出力しない．
(b) X を連立方程式とみなしたとき，その連立方程式の解が存在する．
(c) X を連立方程式とみなしたとき，その連立方程式の解が一意に存在する．

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ を (a)，(b)，(c) で埋め，$\boxed{\text{イ}} \Longrightarrow \boxed{\text{ア}}$ の反例と $\boxed{\text{ウ}} \Longrightarrow \boxed{\text{イ}}$ の反例となる L のプログラムをそれぞれ挙げよ．

問 4 (一般問題)

c は与えられた実数とし，有界な関数 $u(x,t)$ が次の初期値問題をみたすとする．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x + \cos 2x & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(1) $w(y,t) = u(y+ct,t)$ とおく．$w(y,t)$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2) $u(x,t)$ を求めよ．

問 5 (一般問題)

$\mathbb{F}_3$ を三つの要素 $\{0, 1, -1\}$ からなる体とする.

(1) 多項式 $X^2 + 1$ は $\mathbb{F}_3[X]$ で既約であることを示せ.

(2) 体 $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ の乗法群の元の位数として現れる数を列挙せよ.

問 6 (一般問題)

(X, d) を完備距離空間とし, X から X への写像 T が $0 \leq r < \frac{1}{2}$ となる定数 r に対し

$$d(T(x), T(y)) \leq r\{d(T(x), x) + d(T(y), y)\}, \quad {}^{\forall}x,\ y \in X$$

をみたすとする.

(1) T^n を T を n 回合成して得られる写像 $T \circ T \circ \cdots \circ T$ とするとき，任意の $x \in X$ に対し，点列 $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列となることを示せ.

(2) T の不動点が一意に存在することを示せ.

問 7 (一般問題)

$$
\begin{array}{rrrl}
\text{線形計画問題 (P) 目的：} & 2x_1 & +3x_2 & \rightarrow \text{ 最大化} \\
\text{条件：} & x_1 & -x_2 & \leq 1, \\
 & x_1 & +x_2 & = 3, \\
 & & x_2 & \leq 2, \\
 & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) (x_1, x_2) 平面で実行可能領域（許容領域）を図示し，その図を用いて最適解を求めよ．

(2) 線形計画問題 (P) の双対問題を記述せよ．

(3) (2) で導いた双対問題と線形計画問題 (P) との間に成り立つ相補性定理を用いて双対問題の最適解を計算せよ．

問 8 (一般問題)

あるパーティで，n 人の参加者が各自ひとつずつプレゼントを持ち寄り，全員の分を一旦集めた後，ランダムにひとりひとつずつ配り直した．このとき，自分が用意したプレゼントを受け取ることになった参加者の数を $\boldsymbol{N}$ としよう．ただし $n \geq 2$ とする．次の問に答えよ．

(1) A_i を "i 番目の参加者が自分の用意したプレゼントを受け取る" という事象とする．$\mathrm{P}\{A_1\}$ および $\mathrm{P}\{A_1 \cap A_2\}$ はそれぞれいくらか．

(2) $\boldsymbol{N} = 0$ となる確率が次式で与えられることを示せ．

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{N} = 0\} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

(3) $\boldsymbol{N}$ の期待値を求めよ．

問 9 (一般問題)

ある商店で「おにぎり」の販売個数を調べた．i 番目の客が購入した「おにぎり」の個数を x_i として，n 人分のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を観測した．平均購入数を $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ とおく．ただし「おにぎり」を購入しなかった客の記録は残さないので $x_i \geq 1$ である．互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の実現値が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であったと考えて，次の問に答えよ．

(1) まず「おにぎり」を購入しなかった客も含めて考えると，ある客が購入した個数を表す確率変数 Y は二項分布 $B(\theta, m)$ に従うとする．ただし $0 \leq \theta \leq 1$ は未知パラメータ，m は定数である．条件付き確率 $P(Y = y | Y \geq 1)$, $y = 1, 2, \ldots, m$, を表す式を求めよ．

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を与えたときの対数尤度関数 $\ell(\theta)$ を求めよ．また，最尤推定量 $\hat{\theta}$ が次式を満たすように，データによらない関数 $g(\theta)$ を求めよ．

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{m} g(\hat{\theta})$$

(3) 「おにぎり」を x 個購入した客数を n_x と表す．$m = 4$ として，$n_1 = 28$, $n_2 = 48$, $n_3 = 20$, $n_4 = 4$ が観測された．このとき，(2) で得られた $g(\theta)$ を利用して $\hat{\theta}$ を近似する系列 $\hat{\theta}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, を次式で計算する．

$$\hat{\theta}_{k+1} = \frac{\bar{x}}{m} g(\hat{\theta}_k)$$

初期値を $\hat{\theta}_0 = 1$ とおいて，$\hat{\theta}_2$ を計算せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット Σ 上の任意の言語 L に対して，言語 $\mathrm{twice}(L)$ を次で定義する．

$$\mathrm{twice}(L) = \{ww \mid w \in L\}.$$

たとえば，$X = \{\mathsf{aaa}, \mathsf{ab}, \mathsf{bbb}\}$ ならば，$\mathrm{twice}(X) = \{\mathsf{aaaaaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{bbbbbb}\}$ である．

(1) $Y = (\mathsf{ab})^* = \{\varepsilon, \mathsf{ab}, \mathsf{abab}, \mathsf{ababab}, \ldots\}$ のとき，$\mathrm{twice}(Y)$ が正規であることを示せ．ただし ε は空列である．

(2) L が正規で $\mathrm{twice}(L)$ が正規でないような言語 L の具体例をあげ，$\mathrm{twice}(L)$ が正規でないことをポンピング補題を用いて示せ．

(3) アルファベットが 1 文字，たとえば $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$ のときには，言語 L が正規ならば必ず $\mathrm{twice}(L)$ も正規であることを証明せよ．

【注１】 言語 L が正規であることを示すには，L を表す正規表現を示したり，L を認識する有限オートマトンを示せばよい．たとえば，以下はアルファベット $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ 上の言語 $\{w \mid w$ は a で始まる長さ奇数の文字列 $\}$ を表す正規表現である．

$$\mathsf{a}(\mathsf{aa} \cup \mathsf{ab} \cup \mathsf{ba} \cup \mathsf{bb})^*$$

【注２：ポンピング補題】 言語 L が正規であるならば，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する．

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように三つの部分 $s = xyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$.
> 2. $|y| > 0$.
> 3. $|xy| \leq p$.

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は ε である．

問 11 (一般問題)

原点 $(0,0)$ を出発点として，2 次元格子 $[0,R-1]\times[0,R-1]$ を巡る仮想ロボットの動きを追うことを考える．このロボットへの動きの指示を，E, W, S, N の記号の列で与えることにし，その記号の列を「指示列」と呼ぶことにする．各記号 E, W, S, N は，各々，現在地から東へ（x 座標を $+1$ する方向へ），西へ（x 座標を -1 する方向へ），南へ（y 座標を -1 する方向へ），北へ（y 座標を $+1$ する方向へ）進めという指示を表わしている．たとえば，指示列 $w=$ ENENWWS は，原点から出発して，東北東北西西南に進む指示を与える列であり，その結果，ロボットの位置は $(0,1)$ になる．
変数 u に与えられている長さ N の指示列に従い動いたときに，すでに通った点を再度通るかを調べる問題を考える．その問題に対するアルゴリズムの一例として，以下にアルゴリズム simple の概略を示す（変数は適宜宣言されているものとする）．

```
 1 procedure simple (u:  指示列) {
 2   for (i ← 0 ∼ R−1) {
 3     for (j ← 0 ∼ R−1) {
 4       A[i][j] = 0;
 5     }
 6   }
 7   x = 0; y = 0;
 8   while (u に指示列が残っている) {
 9     u より，新たな指示文字 c を読み込む ;
10     if( c = 'E' ) x ← x + 1;
11     else if( c = 'W' ) x ← x - 1;
12     else if( c = 'S' ) y ← y - 1;
13     else if( c = 'N' ) y ← y + 1;
14     else 「入力エラー」と出力し停止 ;
15     if( A[x][y] ≠ 0 ) 「前に通った」と出力し停止 ;
16     A[x][y] = 1;
17   }
18 }
```

この問題ならびにアルゴリズムに関する以下の問に答えよ．なお，解答では，動く途中で $[0,R-1]\times[0,R-1]$ から外に出るような指示列は与えられないと仮定してよい．

(1) アルゴリズム simple には，パラメータ R と N の大きさによっては，領域計算量，時間計算量の問題点が現れる場合がある．この状況例と問題点を示せ．

(2) 上記の問題点（の全部または一部）を解決するアルゴリズムを 2 種類考え，その概略を示し，各々，アルゴリズム simple と比べ，計算量の観点から問題点がどのように改善されるかを述べよ．

問 12 (一般問題)

次の［プログラム 1］のような簡単なプログラミング言語をコンパイルすることを考える．

［プログラム１］

```
x = 10;            （代入文）変数 x に 10 を代入
y = x-1;           （代入文）変数 y に x-1 つまり 9 を代入
print 20-(x+y);    （出力文）式 20-(x+y) の値である 1 を出力
```

この言語のトークンとしては次のものがある：i（変数で，英字１文字からなる），n（整数），print（出力を表す予約語），=（代入を表す），+（和を表す２項演算子），-（差を表す２項演算子），「(」,「)」,「;」．余分な空白や改行は意味をもたない．(式に使える演算子は上で述べたものだけで，* や / はないとする．)

文には代入文と出力文の２種類がある．代入文は「変数 = 式;」の形である．出力文は「print 式;」 の形であって式の値を出力する．

このプログラミング言語については細かい仕様が決まっていない所があるかもしれない．したがって，以下のすべての問について適当に仮定を設けて答えてよいが，その場合には仮定を明記せよ．

(1) 上のプログラミング言語の文法のうち，出力文に関する部分は次のように書ける．$\boxed{}$ 内を埋めよ．

P → print E ;

E → $\boxed{}$ | $\boxed{}$ | F

F → (E) | i | n

ここで，i, n, print, =, +, -, (,), ; は終端記号である．

(2) 出力文「print 20-(x+y);」について，上記の文法の P から始まる構文規則を用いて P を根とする構文解析木を描け．また，print, +, -を演算子だとみなして，この出力文のうちの「print 20-(x+y)」の部分の抽象構文木を描け．ちなみに，抽象構文木は構文木とも呼ばれ，節として演算子，節の子供として節の演算子のオペランドがくるようにした木である．

(3) 出力文のうちの「print 20-(x+y)」の部分を後置記法で記述せよ．さらにこの後置記法による記述を問 (2) の抽象構文木から作る方法を記せ．ここでも print, +, - を演算子だとみなす．ちなみに「2 - 1」の後置記法は「2 1 -」である．

(4) 冒頭の［プログラム１］に対する目的コード（アセンブリコード）を出したい．次の例を参考にして,［プログラム１］の目的コードを書け．最適化はしないこと．

［例］

同じプログラミング言語のソースプログラム

```
x = 1+2;
print x-2;
```

この目的コード：

```
LI    R1,1          /* R1 = 1  */
LI    R2,2          /* R2 = 2  */
ADD   R1,R1,R2      /* R1 = R1 + R2  */
STW   R1,x          /* x  = R1 */
LW    R1,x          /* R1 = x  */
LI    R2,2          /* R2 = 2  */
SUB   R1,R1,R2      /* R1 = R1 - R2 */
BL    PRINT         /* R1 の内容を印刷 */
```

手続き PRINT はレジスタ R1 の内容を印刷するものとする．参考までに，上の［プログラム１］の最適化された目的コードは次になるが，この設問では最適化しない目的コードを問うているので，次を真似しないこと：

```
LI    R1,1          /* R1 = 1  */
BL    PRINT         /* R1 の内容を印刷 */
```

ここで用いたアセンブリ言語のあらましは次のとおりである．下の表で斜体で書いた *R1* や *R2* や *R3* などは，実際にある整数レジスタ R1 から R31 のどれかである．*R1* や *R2* や *R3* が実際は同じレジスタになってもよい．

命令形式	意味
LI *R1*,*const*	正や０や負の定数 *const* を *R1* にロードする
LW *R1*,*address*	*address* 番地の内容を *R1* にロードする
STW *R1*,*address*	*R1* を *address* 番地へストアする
ADD *R1*,*R2*,*R3*	*R2* + *R3* の結果を *R1* へしまう
SUB *R1*,*R2*,*R3*	*R2* - *R3* の結果を *R1* へしまう
BL *address*	R1 をパラメタとして *address* 番地の手続きを呼び出す

専門科目 (午前)　　20　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意

1. 専門基礎問題，問 1，問 2，問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 要求された問題数をこえて解答した場合は 採点されない 可能性がある.
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ.

問 1 (基礎問題)

次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

任意の自然数 n に対して，行列 A^n の要素を n の関数として具体的に表したい．そこで次のような手順を踏んで求めていく．

(1) 行列 A の固有方程式は単根を 1 つ（λ_1 とする）と重根を 1 つ（λ_2 とする）もつ．これらの固有値 λ_1, λ_2 と，それらに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) この場合，行列 A はある正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

というジョルダン標準形に変形できる．P の第 1 列を $\boldsymbol{x}_1$, 第 2 列を $\boldsymbol{x}_2$, 第 3 列を $\boldsymbol{x}_3$, つまり

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とすると，$\boldsymbol{x}_1$ は固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ は固有値 λ_2 に対応する固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{x}_3$ は方程式

$$A\boldsymbol{x}_3 = \lambda_2\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_2 \tag{1.4}$$

を満たすことを示せ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ には定数倍の自由度があり，また $\boldsymbol{x}_2$ が与えられたとき上の方程式 (1.4) を満たす $\boldsymbol{x}_3$ も一意には決まらないが，これらを適当にとって並べた (1.3) の P は A のジョルダン標準形 (1.2) を導く際の正則行列の役割を果たす．(1.1) の A に対して，行列 P および P^{-1} を一組，具体的に求めよ．

(4) これらの結果を利用して，自然数 n に対して，A^n の第 1 行，第 1 列要素 $a_{11}^{(n)}$ を，n の関数として具体的に表せ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 与えられた数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_n > a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

をみたすとする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ とおくとき，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在することを証明せよ．

(2) 次の極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx$$

が存在することを証明せよ．

問 3 (基礎問題)

空でない集合 X とその上の 2 項関係 $\preceq$ に関する以下の 3 条件を考える．

反射性 $\forall x \in X(x \preceq x)$

推移性 $\forall x, y, z \in X\Big(\big((x \preceq y) \text{ かつ } (y \preceq z)\big) \text{ ならば } (x \preceq z)\Big)$

反対称性 $\forall x, y \in X\Big(\big((x \preceq y) \text{ かつ } (y \preceq x)\big) \text{ ならば } (x = y)\Big)$

反射性と推移性が成り立つとき $\langle X, \preceq\rangle$ は擬順序集合であるといい，反射性と推移性と反対称性が成り立つとき $\langle X, \preceq\rangle$ は順序集合であるという．また，X の要素 m が条件

$$\forall x \in X(x \preceq m)$$

を満たすならば，m は $\preceq$ に関する最大要素である，という．

(1) $\langle X, \preceq\rangle$ を順序集合とする．このとき $\preceq$ に関する最大要素は，存在するならばただひとつであることを証明せよ．

(2) アルファベット $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ から成る文字列中の，$\mathtt{a}$ を文字列 α に，$\mathtt{b}$ を文字列 β に，$\mathtt{c}$ を文字列 γ にそれぞれ同時に置き換える変換を

$$[\mathtt{a}{:=}\alpha, \mathtt{b}{:=}\beta, \mathtt{c}{:=}\gamma]$$

と書く．たとえば

$$\mathtt{abac}[\mathtt{a}{:=}\mathtt{aca}, \mathtt{b}{:=}\mathtt{b}, \mathtt{c}{:=}\mathtt{b}] \;=\; \mathtt{acabacab}$$

である．そして，Σ の要素だけから成る長さ 1 以上の有限文字列全体を Σ^+ と書き，Σ^+ 上の 2 項関係 $\preceq$ を次で定義する．

$$\alpha \preceq \beta \quad\Longleftrightarrow\quad \exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Sigma^+\Big(\alpha[\mathtt{a}{:=}\gamma_1, \mathtt{b}{:=}\gamma_2, \mathtt{c}{:=}\gamma_3] \;=\; \beta\Big)$$

（すなわち，α に適当な代入を施せば β になる）

このとき，次のふたつを証明せよ．

(2-1) $\langle \Sigma^+, \preceq\rangle$ は擬順序集合である．

(2-2) $\langle \Sigma^+, \preceq\rangle$ は順序集合でない．

問 4 (一般問題)

X を実ヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ はそれぞれ X の内積，ノルムを表すとする．X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に弱収束するとは，任意の $y \in X$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

となるときをいう．次の設問に答えよ．

(1) X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に弱収束するとする．このとき，

$$\|x\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|$$

を示せ．

(2) (1) において，X が N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の場合は等式が成り立つことを示せ．

(3) (1) において，等式が成立しない例を挙げよ．

問 5 (一般問題)

(1) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ とする．合同式

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv n \pmod 8$$

をみたす整数の組 (x, y, z) が存在しない n を全て挙げよ．

(2) 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 112$$

をみたす整数の組 (x, y, z) が存在するならば，例を挙げよ．存在しないならば，そのことを示せ．

問 6 (一般問題)

a, b を実定数とする．$x \geq 0$ 上の連続関数 $f(x)$，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du(x)}{dx} + au(x) = \dfrac{f(x)}{n} & (x > 0) \\ u(0) = b \end{cases}$$

の解を $u_n(x)$ とする．各点 $x \in [0, \infty)$ で $\lim_{n \to \infty} u_n(x)$ を求めよ．

問 7 (一般問題)

実数パラメータ s を含んだ線形計画問題

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{目的：} & 2x_1 & +3x_2 & +(8-2s)x_3 & & & \rightarrow \text{ 最小化} \\
\text{条件：} & 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & -x_4 & & = 6, \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & & -x_5 & = 4+2s, \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

に対して，以下の問に答えよ.

(1) $s = 0$ のとき，$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0$ はこの問題の最適解であることを示せ.

(2) 条件 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ を満たす最適解が存在する s の範囲を示せ.

問 8 (一般問題)

F，G をともに 1 次元分布関数とし，それぞれ逆関数 F^{-1}，G^{-1} を持つものとする．以下の問に答えよ．ただし P は確率を表し，E は期待値を表す．

(1) U を $(0,1)$ 上の一様分布にしたがう確率変数とするとき，$X = F^{-1}(U)$ が分布 F にしたがう確率変数となることを示せ．

(2) 次の 3 つの命題 (A), (B), (C) が同値であることを示せ．ただし，2 つの確率変数 X, Y に対して，$\mathrm{P}\{X \leq Y\} = 1$ であり，かつ期待値 $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ が存在するとき，$\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$ が成り立つことを証明なしで用いて構わない．

(A) 任意の実数 a に対して $F(a) \geq G(a)$.

(B) 分布 F にしたがう確率変数 X と分布 G にしたがう確率変数 Y の組 (X, Y) で，$\mathrm{P}\{X \leq Y\} = 1$ となるものが存在する．

(C) X を分布 F にしたがう確率変数，Y を分布 G にしたがう確率変数とするとき，期待値 $\mathrm{E}(f(X))$，$\mathrm{E}(f(Y))$ が存在するような任意の非減少関数 f に対して，$\mathrm{E}(f(X)) \leq \mathrm{E}(f(Y))$.

(ヒント: (A)⇒(B), (B)⇒(C), (C)⇒(A) を示すと良い．)

問 9 (一般問題)

θ は $0 \leq \theta \leq 1$ である未知パラメータ，$X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は互いに独立な $2n$ 個の確率変数とする．但し，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は二項分布 $\mathrm{B}(m, \theta)$ に従い，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は二項分布 $\mathrm{B}(m, \theta^2)$ に従うとする．また，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の標本平均をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}$ と置く．

(1) θ の尤度関数 $L(\theta)$ を求めよ．

(2) 区間 $[0, 1]$ 中で尤度関数が最大値を取る θ の値 (つまり最尤推定量) $\widehat{\theta}$ を m, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ で表せ．

問 10 (一般問題)

定数 1，足し算 +，掛け算 * の 3 種類の記号だけを使ってできる列で，前置記法（ポーランド記法ともいう）の式になっているもの全体の集合を $\mathcal{E}_1$ とする．正確には，$\mathcal{E}_1$ は次の文脈自由文法で定義される文脈自由言語である．

終端記号：1, +, *
非終端記号：E
開始記号：E
生成規則：

$$
\begin{array}{lcl}
E & \to & \texttt{1} \\
E & \to & \texttt{+}EE \\
E & \to & \texttt{*}EE
\end{array}
$$

同様に，定数 2，足し算 +，掛け算 * の 3 種類の記号だけを使ってできる列で，前置記法の式になっているもの全体の集合を $\mathcal{E}_2$ とする．そして自然数 $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_1$ の部分集合 $\mathcal{E}_{1,N}$ と $\mathcal{E}_2$ の部分集合 $\mathcal{E}_{2,N}$ を次で定義する．

$$\mathcal{E}_{1,N} = \{w \in \mathcal{E}_1 \mid w \text{ を式として評価したときの値が } N \text{ 以下}\}$$
$$\mathcal{E}_{2,N} = \{w \in \mathcal{E}_2 \mid w \text{ を式として評価したときの値が } N \text{ 以下}\}$$

たとえば，式 `***111+11` を評価すると値は 2 なので（なぜなら $((1 \times 1) \times 1) \times (1 + 1) = 2$ である），これは $\mathcal{E}_{1,5}$ の要素である．また，式 `+**22*222` の値は 18 なので（なぜなら $((2 \times 2) \times (2 \times 2)) + 2 = 18$ である），これは $\mathcal{E}_{2,10}$ の要素ではない．

(1) $\mathcal{E}_{1,2}$ が正規言語でないことを示せ．（後に述べる「ポンピング補題」を用いてよい．）

(2) 任意の $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_{2,N}$ が正規言語であることを示せ．

(3) 任意の $N \geq 1$ に対して，$\mathcal{E}_{1,N}$ が文脈自由言語であることを示せ．

（ヒント：ポンピング補題）言語 $\mathcal{L}$ が正規言語であるとき，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する．

> s が $|s| \geq p$ であるような $\mathcal{L}$ の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in \mathcal{L}$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は空列となる．

問 11 (一般問題)

単語を次々に読んで単語とその出現回数をデータ構造にしまっておき（登録という），つぎに，単語が与えられたときにその単語の出現回数を返す（検索という）プログラムを作りたいとする．

(1) 用いるデータ構造として，線形リスト，2 分探索木，ハッシュ表を用いることが考えられる．これらを比較し，登録と検索について，時間計算量も含めてそれぞれのデータ構造の利点と欠点を述べよ（全体で 10 行程度）．

(2) データ構造としてハッシュ表を用いるとする．最初に述べたプログラムの仕様のうちの登録に関する次の部分：

- データ構造の初期化の部分
- 単語が１つ与えられたとき，その単語とその出現回数をデータ構造にしまう部分

のアルゴリズムとデータ構造を，Java 風，C 風，Scheme 風のプログラム言語または明確な自然言語を用いて記述し，説明せよ．

異なる単語のハッシュ値が一致（衝突という）したときの処理法を工夫する必要があることに留意せよ．

アルゴリズムを書くときの仮定として，与えられた単語を word とし，単語を与えるとそのハッシュ値を返す関数 hash，必要なら第 2，第 3，. . . のハッシュ値を返す関数があるとしてよい．ハッシュ表のあふれは気にしなくてよい．

問 12 (一般問題)

複数のスレッド（またはプロセス）を単一プロセッサで並行実行する状況を考える．この問題では，以下の仮定が成り立つものとする．

- ある瞬間に実行中のスレッドは高々一つ．
- プログラムの各行は，その行の実行中にスレッドが切り替えられることなく実行される（ただし，後述の acquire 命令は例外である）．
- プログラムの行と行の間では，スレッド切り替えが起こりうる．

たとえば以下の例では，スレッド $\mathtt{T}_1, \mathtt{T}_2$ が，変数 x を共有して実行される．スレッド切り替えのタイミングにより，y の最終値は 1 または 2 となる．ただし，=は代入を表す．

$\mathtt{T}_1$	$\mathtt{T}_2$
`x = 1;`	`x = 0;`
	`y = x + 1;`

スレッド間の同期や相互排他のために，ロックを獲得する acquire 命令と解放する release 命令が利用できるものとする．他のスレッドが獲得済みのロックに対し，acquire 命令による獲得を試みると，そこでスレッドはブロックする（別のスレッドに実行権が移る）．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 以下の二つのスレッドが変数 x, y を共有して並行に実行される．共有変数 x, y の初期値がともに 0 のとき，二つのスレッドの実行が終了した時点で (x, y) の組の取りうる値をすべて列挙せよ．

$\mathtt{T}_1$	$\mathtt{T}_2$
`y = x + 1;`	`x = y + 1;`
`y = x + 1;`	`x = y + 1;`
`y = x + 1;`	

(2) 以下の n 個のスレッド $\mathtt{T}_i(0 \le i < n)$ が n 個のロック $\mathtt{lock}_i(0 \le i < n)$ を共有して並行に実行される．なお，$\mathtt{L}_i(0 \le i < n)$ はラベルであり，jump 文と組み合わせることにより，各スレッドは無限ループを構成する．2 以上の各 n に対し，デッドロックが生じる可能性があるかないかを答えよ．理由も明記すること．

$\mathtt{T}_i(0 \le i < n)$

```
L_i:acquire lock_i;
    acquire lock_{i+1 mod n};
    release lock_{i+1 mod n};
    release lock_i;
    jump L_i;
```

(3) 以下の $2n$ 個のスレッド $\mathtt{T}_i(0 \le i < 2n)$ が (2) と同様に並行実行される．このとき，1 以上の各 n に対し，デッドロックが生じる可能性があるかないかを答えよ．理由も明記すること．

$\mathtt{T}_{2j}(0 \le j < n)$

```
L_{2j}:acquire lock_{2j};
       acquire lock_{2j+1};
       release lock_{2j+1};
       release lock_{2j};
       jump L_{2j};
```

$\mathtt{T}_{2j+1}(0 \le j < n)$

```
L_{2j+1}:acquire lock_{2j+2 mod 2n};
         acquire lock_{2j+1};
         release lock_{2j+1};
         release lock_{2j+2 mod 2n};
         jump L_{2j+1};
```

専門科目 (午前)　　19　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意

1. 専門基礎問題，問 1，問 2，問 3 より 2 問を選択 し解答せよ．
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ．
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ．
4. 要求されたより多くの問題に解答した場合は 採点されない 可能性がある．
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ．

問 1 (基礎問題)

以下の問に答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列を表す．

(1) S を対角成分 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ をもつ $n \times n$ 上三角行列とする．

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここに，大きな 0 は対角成分より下の成分がすべて 0 であることを表し，大きな * は対角成分より上の成分が任意であることを表す．任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して，

$$\boldsymbol{z}_i = (S - \alpha_{n-i+1}\, E) \cdots (S - \alpha_n\, E)\, \boldsymbol{z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

としたとき，$\boldsymbol{z}_i$ の第 $n - i + 1$ 成分から第 n 成分は常に 0 であることを示せ (ヒント：i についての数学的帰納法を考えるとよい)．

(2) A を任意の $n \times n$ 正方行列，その固有値を重複を含めて $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする．このとき，適当な $n \times n$ 正則行列 P を用いて，$S = P^{-1} A P$ により (1) のような上三角行列 S に変換できることが知られている．(1) の結果を用いて，

$$(A - \alpha_1\, E) \cdots (A - \alpha_n\, E) = O$$

であることを示せ．

(3) m 次多項式 $f(x) = c_0\, x^m + c_1\, x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\, x + c_m\ (c_0 \neq 0)$ と $n \times n$ 正方行列 A に対して，$f(A) = c_0\, A^m + c_1\, A^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\, A + c_m\, E$ とする．$m > n$ かつ $f(A) \neq O$ であるとき，$f(A) = g(A)$ を満たし，次数が $n - 1$ 以下の多項式 $g(x)$ が存在することを示せ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ.

(1) つぎの級数は発散することを示せ.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

(2) 任意の実数 a に対し, 1 または -1 からなる数列 $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ を適当に選べば,

$$a=\frac{s_1}{1}+\frac{s_2}{2}+\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}+\cdots+\frac{s_n}{n}+\cdots$$

とできることを示せ.（ヒント： (1) の級数はどの項からはじめても発散することに注目し，数列 $\{s_n\}$ を帰納的に定義する.）

問 3 (基礎問題)

8 ビットのプロセッサを用いた演算について以下の設問に答えよ．ただし，このプロセッサは整数を表現するのに 2 の補数表現（2^8 を法とする二進表現）を用いるものとする．

(1) このプロセッサにおいて，整数の 20 と -20 のビット表現はそれぞれ 00010100 と 11101100 となる．-40 のビット表現を答えよ．

(2) 整数を表現するのに，最上位ビットで符号を表し，その他のビットで数の絶対値を表す方法も考えられる．たとえば，この方法で -20 を表すと 10010100 となる．この方法と前述の 2^8 を法とした方法を比較し，2^8 を法とした方法が優れている点を論じよ．

(3) 以下の C 言語の式（&はビットごとの論理積）を評価すると，このプロセッサで扱える任意の整数 $x \neq 0$ に対して，その二進表現の最右の 1 を残して他をすべて 0 とした表現を与えることを示せ．

$$x \ \&\ (-\ x)$$

たとえば，x が 11101100 のとき

$$x \ \&\ (-\ x) \Rightarrow 11101100 \ \&\ 00010100 \Rightarrow 00000100$$

問 4 (一般問題)

$\mathbb{R}^2$ を 2 次元ユークリッド平面とし，C と D を $\mathbb{R}^2$ の空でない閉凸集合とする．

(1) C がコンパクトであるとき，

$$C - D = \{x - y : x \in C,\ y \in D\}$$

は閉凸集合となることを示せ．

(2) C がコンパクトでないとき，$C - D$ が閉集合にならない例をあげよ．

問 5 (一般問題)

n を自然数，$g(n)$ を n 次対称群の元の位数の最大値とする．このとき以下の設問に答えよ．

(1) $g(3)$ および $g(7)$ を求めよ．

(2) $g(n) < g(n+1)$ はいつでも成り立つか？

問 6 (一般問題)

$u(x,t)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とする.

(1) $u(x,t)$ が波動方程式

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

をみたすならば, 1 変数関数 f, g を用いて

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

と表されることを示せ.

(2) $u(x,t)$ が (1) の波動方程式をみたすならば,

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \text{任意の実数 } a,\, b \text{ に対して} \\ u(x-a,t-b) + u(x+a,t+b) = u(x+b,t+a) + u(x-b,t-a) \end{cases}$$

が成立することを示せ.

(3) 逆に, (A) をみたす $u(x,t)$ は, (1) の波動方程式をみたすことを示せ.

問 7 (一般問題)

$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{b}$ を m 次元列ベクトルとして，n 次元列ベクトル変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ に関する線形等式・不等式系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

の解 $\boldsymbol{x}$ の集合を S とする．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ の要素はすべて実数で，^{T} はベクトルの転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) 「S が非有界であるか否か，すなわち，$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k\| = \infty$ なる $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots$ が S 内に存在するか否か」の判定を，1 つの線形計画問題を単体法（シンプレックス法）で解くことによって，行いたい．ここで，$\|\boldsymbol{x}^k\|$ は $\boldsymbol{x}^k$ のユークリッドノルムを表す．どのような線形計画問題を構成すればよいか．その線形計画問題を示し，その問題を単体法で解くことによって，これを判定できることを説明せよ．

(2) 以下の数値例について，(1) で提案した線形計画問題を単体法で解くことにより,「S は非有界であるか否か」を判定せよ．

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2,\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

問 8 (一般問題)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ 上の確率変数 $\boldsymbol{X}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, に対して，新しい確率変数 $\boldsymbol{Y}(\omega)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\boldsymbol{X}(\omega)}, & \boldsymbol{X}(\omega) \neq 0 \quad \text{のとき} \\ 0, & \boldsymbol{X}(\omega) = 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

このとき次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{X}(\omega)$ の分布関数を $F_X(x)$ としたとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の分布関数 $F_Y(x)$ を求めよ．ただし，点 a における関数 $F_X(x)$ の左極限 $\lim_{x \uparrow a} F_X(x)$ を $F_X(a-0)$ で表すものとする．

(2) $\boldsymbol{X}(\omega)$ の分布関数が

$$F_X(x) = \begin{cases} \rho\, e^{\alpha x}, & x < 0 \quad \text{のとき} \\ 1 - \rho\, e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

で与えられるとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の分布関数を具体的に書き下せ．ただし，α, ρ は，$\alpha > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$ を満たすパラメータである．

(3) $a > 0$ に対して，密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

をもつ分布を，“パラメータ a をもつコーシー分布” と呼ぶ．$\boldsymbol{X}(\omega)$ がパラメータ a をもつコーシー分布に従うとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の密度関数 $f_Y(x)$ を求め，それが何という分布であるか答えよ．

問 9 (一般問題)

以下の表はある地域の年平均気温である．

西暦 (年)	1960	1970	1980	1990	2000
気温 (°C)	15.4	15.2	15.4	17.0	16.9

このデータから西暦 2100 年の年平均気温を予測したい．

下の設問 (1)，(2) ではこのための枠組みを議論するが，このデータでいえば $n = 5$ であり，表の各列を $i = 1, 2, \ldots, 5$ として，$x_i =$ (西暦 $- 1980)/10$，$y_i =$ 気温 とおく．さらに西暦 2100 年には $i = 0$ と番号をつけ，$x_0 = 12$ として，この時点における気温 y_0 の予測値 $\hat{y}_0$ を求める．

以下の設問に答えよ．

(1) n 個 $(n \geq 2)$ の (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, から

$$\hat{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

によって予測する場合を以下で考える．ただし $w_1, w_2, \ldots, w_n$ は定数であり，その値は $x_0, x_1, \ldots, x_n$ から設問 (2) で定める．y_i は確率変数 Y_i の実現値で

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

を仮定する．β_0, β_1 は未知定数，ϵ_i は平均 0，分散 σ^2 の確率変数で $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ は互いに独立である．このとき予測気温

$$\hat{Y}_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

の期待値 $E(\hat{Y}_0)$ と分散 $V(\hat{Y}_0)$ を求めよ．

(2) 任意の β_0, β_1 において $E(\hat{Y}_0) = E(Y_0)$ となる必要十分条件を求め，その条件を満たす $w_1, w_2, \ldots, w_n$ のなかで $V(\hat{Y}_0)$ を最小にするものが

$$w_i = \frac{1}{n} + \frac{x_0 x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

であることを示せ．ただし $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ を仮定する．

(3) 設問 (1)，(2) で求めた方法を用いて，上に与えられたデータから西暦 2100 年における年平均気温の予測値 (°C) を計算せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{0, 1\}$ 上の言語 A, B, C を以下のように定義する．

$$A = \{0^n 1^m 0^n | n, m \geq 0\}$$
$$B = \{0^n 1^n 0^m | n, m \geq 0\}$$
$$C = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$$

これらの言語について以下の問に答えよ．

(1) 言語 A, B を生成する文脈自由文法 (注 1) をそれぞれ与えよ．

(2) 言語 A と B の交わり $A \cap B$ は文脈自由であるか? 文脈自由ならば，言語 $A \cap B$ を生成する文脈自由文法を与えるとともにその設計方針を説明し，文脈自由でないならば，言語 $A \cap B$ が文脈自由でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

(3) 言語 C の補集合 $\overline{C}$ は文脈自由であるか? 文脈自由ならば，言語 $\overline{C}$ を生成する文脈自由文法を与えるとともにその設計方針を説明し，文脈自由でないならば，言語 $\overline{C}$ が文脈自由でないことをポンピング補題を用いて示せ．

注 1: 以下は，言語 $\{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^n | \ n \geq 0\}$ を生成する文脈自由文法の例である．

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathtt{a}X\mathtt{b} \\ X &\rightarrow Y \\ Y &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

なお，開始変数は一番上の規則の左辺に現れる変数とする．この例では X が開始変数である．

注 2: ポンピング補題: 言語 L が文脈自由であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 5 つの部分文字列 $s = uvxyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $uv^i xy^i z \in L$
> 2. $|vy| > 0$
> 3. $|vxy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε となる．

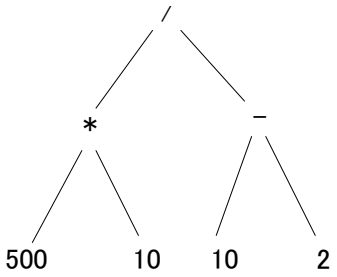
問 11 (一般問題)

整数を扱う算術式 (arithmetic expression)

`500*10/(10-2)` (A)

を考える．

算術式を解析する際には，構文木 (syntax tree) を用いることが多い．(A) の構文木は下図の通りである．以下の設問に答えよ．



(1) (A) の式を後置記法 (postfix notation) により表せ．また，算術式の構文木が与えられたとき，そこから後置記法の式を作る方法のあらましを簡単に述べよ．なお，後置記法は，逆ポーランド記法 (reverse Polish notation) とも言い，たとえば算術式「`2 - 1`」の後置記法は「`2 1 -`」である．

(2) 小問 (1) で答えた (A) の後置記法の式の値を，スタック (stack) を用いて計算する方法を示せ．簡単な説明をつけよ．参考のため，後置記法の式「`2 1 -`」の値を計算する最初の部分を示すと次のようになる．

入力	スタック (右がトップ)	説明
		初期化．スタックは空
2	2	数 2 をプッシュ
1	2 1	数 1 をプッシュ
−	(以下略)	

(3) (A) の値を計算し，演算結果をレジスタ `r1` にしまうような目的コードをアセンブリ言語形式で書け．計算の最適化はせず，(A) の計算を忠実に（乗算，減算，除算を 1 回ずつ使って）実行するような目的コードにし，また，使用するレジスタができるだけ少ないコードとせよ．

参考のため，算術式「`2 - 1`」を計算し，結果をレジスタ `r1` にしまうような目的コードは次である．

```
li    r1, 2
li    r2, 1
sub   r1, r1, r2
```

ここで用いる計算機は簡単な RISC アーキテキチャのものであって，命令として用いることができるのは，次の形のものだけとする．

命令形式	意味
`li` rA, $const$	整数定数 $const$ を rA にロードする
`add` rA, rB, rC	$rB + rC$ の結果を rA へしまう
`sub` rA, rB, rC	$rB - rC$ の結果を rA へしまう
`mul` rA, rB, rC	$rB * rC$ の結果を rA へしまう
`div` rA, rB, rC	rB / rC の結果を rA へしまう

（注）斜体で記した rA，rB，rC は整数型のレジスタのどれかであり，具体的には `r1`〜`r15` が使えるとする．rA，rB，rC が同じレジスタでもよい．

問 12 (一般問題)

一般的なオペレーティングシステム (OS) において，アプリケーション・ソフトウェアのプログラムは，ユーザモードなどと呼ばれる動作モードでプロセッサによって実行される．これをプロセスという．一方，OS カーネルのプログラムは，特権モードあるいはスーパーバイザーモードなどと呼ばれる動作モードで実行される．

(1) ユーザモードと特権モードの違いを述べ，なぜプロセスをユーザモードで実行するのか説明せよ．

(2) カーネルが提供する機能をプロセスが呼び出すときは，実行モードをそれまでのユーザモードから特権モードへ切り替えてから，カーネル内のコードへ分岐する必要がある．ユーザモードから特権モードへ動作モードを切り替えるだけの単純な機械語命令をプロセッサに持たせると，セキュリティ上，悪用される危険性がある．悪用の具体例を示せ．

(3) 一般にカーネルが提供する機能をプロセスが呼び出すときは，割り込みをソフトウェア的に発生させる機械語命令を使う．割り込みが発生したときのプロセッサの動作を説明せよ．

(4) 一般に割り込みが発生したときは，特権モードに切り替わる．セキュリティの観点からこの機能を悪用されないようにするには，メモリの保護についても配慮が必要である．具体的に何に配慮するべきか，割り込み発生時の動作に則して説明せよ．